# Análisis Matemático I y II
# Medida e Integración
# Introducción al Análisis Complejo
# Análisis Complejo
# Análisis Funcional
# Espacios Localmente Convexos

B. Cascales (2004)

## Sobre la programación de las asignaturas

Todas las asignaturas programadas lo han sido siguiendo el mismo patrón: la materia se divide en capítulos y éstos en lecciones. La lección no debe tomarse como una *unidad temporal* sino como *una unidad temática*. Cada capítulo tiene una pequeña introducción que sitúa la materia a tratar. Cada lección se subdivide en epígrafes y se comenta individualmente. Algunas veces la descripción es bastante detallada y técnica; otras veces la descripción es más sucinta. Se han incluido numerosas citas y referencias precisas a páginas de libros y artículos de donde se ha tomado la materia.

Cada asignatura cuenta con una introducción individual donde es *presentada,* se fijan sus *objetivos generales* y sus *contenidos,* junto con los *objetivos concretos y destrezas* que el alumno debe alcanzar. La introducción se completa con los *prerrequisitos* necesarios para cursar la asignatura y una *bibliografía seleccionada,* donde se han elegido siempre *cuatro* libros o apuntes editados que se ajustan, lo más posible, a la materia presentada.

La elaboración de un programa de cualquier parte de las matemáticas lleva consigo siempre un problema de elección. Esto es especialmente cierto en algunas asignaturas de Análisis Matemático por la gran cantidad de temas que se pueden abarcar. Hecha una elección cualquiera, es difícil no cometer omisiones que puedan parecer graves a determinados especialistas en la materia. La elección de temas llevada a cabo en este proyecto está supeditada a los objetivos concretos que hemos fijado en cada asignatura.

En nuestra programación se ha cuidado ir de lo concreto a la estructuración lógica de los problemas para, después de su estudio riguroso, volver al mundo de las aplicaciones. Esta presentación de los temas, algunas veces redundante, tiene las ventajas de asegurar el conocimiento de los orígenes de los problemas, y de que los teoremas y resultados básicos no son sólo demostrados, sino también aplicados.

Para algunas asignaturas, el proyecto presentado es demasiado amplio para ser explicado en los créditos que se asignan a las mismas. En estos casos hemos indicado varias elecciones posibles, que se pueden fijar en función de los objetivos a conseguir.

## Objetivos generales

El proyecto docente que se presenta ha sido concebido, desde nuestra experiencia, para responder a las demandas concretas que plantea la enseñanza del Análisis Matemático en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Murcia. Para describir los objetivos generales que perseguimos, utilizaremos la descripción que de los mismos se ha hecho recientemente en el Libro Blanco para el futuro Grado en Matemáticas auspiciado por la ANECA:

- *Conocer la naturaleza, métodos y fines de los distintos campos de la Matemática junto con cierta perspectiva histórica de su desarrollo.*

- *Reconocer la presencia de la Matemática subyacente en la Naturaleza, en la Ciencia, en la Tecnología y en el Arte. Reconocer a la Matemática como parte integrante de la Cultura.*
- *Desarrollar las capacidades analíticas, la intuición y el pensamiento lógico y riguroso a través del estudio de la Matemática.*
- *Capacitar para la utilización de los conocimientos teóricos y prácticos adquiridos en la definición y planteamiento de problemas y en la búsqueda de sus soluciones tanto en contextos académicos como profesionales.*
- *Preparar para posteriores estudios especializados, tanto en una disciplina matemática como en cualquiera de las ciencias que requieran buenos fundamentos matemáticos.*

Además de estos objetivos generales, se busca que el alumno alcance un nivel aceptable en las competencias teóricas y destrezas de carácter general que siguen:

- Comprender y utilizar el lenguaje matemático.
- Conocer demostraciones rigurosas de algunos teoremas clásicos e importantes.
- Asimilar la definición de un nuevo objeto matemático, en términos de otros ya conocidos, y ser capaz de utilizar este objeto en diferentes contextos.

+ Resolver problemas de Matemáticas.
+ Proponer, analizar, validar e interpretar modelos de situaciones reales sencillas, utilizando las herramientas matemáticas más adecuadas a los fines que se persigan.

* Utilizar aplicaciones informáticas de análisis estadístico, de cálculo numérico y simbólico y de visualización gráfica, para experimentar en Matemáticas y resolver problemas.
* Desarrollar programas que resuelvan problemas matemáticos.
* Utilizar herramientas de búsqueda de recursos bibliográficos en Matemáticas.

## Sobre la metodología de la enseñanza

La actividad docente debe organizarse de acuerdo con el contenido de las diferentes partes del programa y en función de los objetivos fijados. Tendremos actividades de tres tipos: clases teóricas, clases prácticas y clases en las aulas de informática cuando la materia lo requiera.

Toda actividad matemática se descompone en ciclos que podemos reconocer, "grosso modo", como las siguientes etapas: observación, matematización, deducción y aplicaciones. Desde esta perspectiva, nuestro método de enseñanza es, como nuestras programaciones, de planteamiento sencillo: iremos de lo concreto, fenómeno observable, a la estructuración y organización lógica del problema, matematización, para, después de motivada y estudiada la teoría general, volver al mundo concreto de las aplicaciones.

En matemáticas, como en cualquier otra ciencia, se deben aunar la creatividad y el esfuerzo, tanto por parte del profesor como del alumno. El profesor debe hacer investigación, que le obligue a considerar las técnicas en matemáticas como herramientas útiles para un objetivo ulterior, y no sólo como obras maestras a admirar. El profesor debe *mimar* la docencia, preparando las clases y motivando a los alumnos. El profesor debe intentar transmitir al alumno esa íntima satisfacción que causa la comprensión de una materia, y más todavía, el descubrimiento matemático. Sin embargo, también debe explicarle, posiblemente con su ejemplo, que sin esfuerzo, dedicación y sacrificio, no es posible, ni la mejora individual, ni una adecuada formación científica.

Alternaremos las clases de tipo teórico con clases prácticas, en las que se abordarán ejercicios y aplicaciones de la materia. En estas clases se procurará que los estudiantes aprendan a desarrollar estrategias resolutivas de ejercicios sencillos que ilustren y muestren aplicaciones de la asignatura, o que den contraejemplos cuyo análisis indique la necesidad de las hipótesis de los teoremas básicos.

Las horas de tutoría son el marco idóneo para que el alumno pueda aclarar las dudas que le puedan quedar después de las discusiones en clase.

## Evaluación

Por lo general, y salvo en cursos con pocos estudiantes, donde el profesor puede efectuar un seguimiento casi diario del trabajo individual, la evaluación la realizaremos recurriendo a pruebas escritas. En estos casos, los exámenes se llevarán a cabo de acuerdo con la normativa vigente en la universidad, según la cual, se establecen los siguientes criterios:

- Antes del comienzo del curso, deben quedar fijadas y hechas públicas, no sólo las fechas de dichas pruebas, sino también la modalidad de examen, la duración y los criterios de evaluación que se aplicarán en cada asignatura. De esta forma, el alumno conoce de antemano, y de manera precisa, el modo de calificación principal que se seguirá durante el curso.
- Se procurará que los exámenes no tengan una duración superior a tres horas y media, debiendo establecerse un periodo de descanso de quince minutos si la duración fuese mayor (salvo que de común acuerdo con los alumnos se decida lo contrario). Una innegable ventaja que presenta este tipo de pruebas (de cierta extensión) es que *fuerzan* al estudiante a adquirir una visión global de la asignatura y a percibir las interrelaciones entre sus distintas partes, objetivos éstos muy difíciles de conseguir por otros métodos.
- Cuando el tipo de preguntas se preste a ello, el profesor responsable hará pública la solución correcta, antes de que se lleve a cabo la revisión de exámenes. De esta forma, el alumno puede calibrar la exactitud de sus respuestas y el modo correcto de resolución de cada uno de los ejercicios.

Los exámenes tendrán una parte teórica y una parte práctica, cuyos porcentajes estarán fijados desde principio de curso, así como los contenidos mínimos de teoría (resultados más importantes) cuyas demostraciones se exigirán.

# Índice general

# Parte I

# Análisis Matemático I y II

# Análisis Matemático I y II

## ANÁLISIS MATEMÁTICO I

| | |
|---|---|
| Código: | **0A2** |
| Nombre: | **Análisis matemático I** |
| Descripción BOE: | **Análisis de una variable real. Elementos de variable compleja** |
| Tipo: | **Troncal (Primer ciclo)** |
| Créditos: | **18 (11.5T + 6.5P)** |
| Duración: | **Anual** |
| Contenidos: | **Programa** |

La asignatura *Análisis Matemático I* tiene como objetivo fundamental el estudio de las funciones reales de una variable real. Los contenidos que se abordan forman parte esencial de los cimientos del Análisis Matemático, lo que hace que el programa y los objetivos específicos de la misma resulten básicamente coincidentes en todos los estudios conducentes a la Licenciatura en Matemáticas. El núcleo esencial es el cálculo diferencial e integral, y en torno a éste se van configurando todos los otros elementos que le dan consistencia y fundamento e ilustran la enorme utilidad de los conceptos y técnicas desarrollados en la asignatura.

Algunas de las cuestiones que se abordan pueden haber sido presentadas superficialmente en la Enseñanza Media, en general desde un punto de vista meramente manipulativo. Los alumnos llegan actualmente a la Universidad sin (o casi sin) tener experiencias de demostraciones matemáticas. Únicamente conocen una serie de técnicas de cálculo y no saben dar razón de las mismas. Son esos los factores que pueden influir, tanto en la forma de presentar la materia, como en el orden elegido para desarrollarla.

Aunque el dominio de las técnicas de cálculo y la ampliación de los conocimientos previamente adquiridos son objetivos prioritarios de la asignatura, no lo es menos el que el alumno se inicie progresivamente en el método matemático y se habitúe a saber analizar, comprender y reproducir demostraciones de teoremas.

## Objetivo de la asignatura

El objetivo central del curso es estudiar las funciones reales de variable real, iniciando al alumno en los métodos del Análisis Matemático. Los objetivos generales que persigue la asignatura son los siguientes:

- Establecer las propiedades esenciales del cuerpo de los números reales, en particular, el significado de la noción de completitud en términos de existencia de supremo y de convergencia de sucesiones de Cauchy.
- Formular, de forma precisa, el concepto de límite para sucesiones y funciones, y habituar al alumno a utilizar, de un modo riguroso, la noción de límite.
- Adquirir los conceptos de función continua, derivable e integrable, tanto en términos de una comprensión intuitiva, como de una formulación matemáticamente precisa de los mismos.
- Conocer y saber utilizar las propiedades de las funciones continuas, derivables e integrables, en relación con la resolución de problemas. Comprender, así mismo, las demostraciones que justifican dichas propiedades.
- Entender el significado y saber aplicar el teorema fundamental, del cálculo a la resolución de problemas.
- Aprender las nociones de serie numérica e integral impropia, así como el concepto de serie de potencias y su significado en la representación de funciones y en el cálculo aproximado de los valores de una función en un punto.

## Contenido

1. **Repaso y ampliación del cálculo de derivadas y antiderivadas**
   Derivadas de las funciones elementales. Derivadas de la suma, producto y cociente de funciones. Regla de la cadena. La antiderivada. Cambio de variable e integración por partes. Funciones racionales. Funciones racionales en seno y coseno. Funciones racionales de $e^x$. Funciones racionales en senh y cosh. Algunos tipos de funciones irracionales.

2. **Números reales**
   Breve repaso de los diferentes conjuntos numéricos que el alumno conoce y de sus propiedades básicas. Introducción sucinta al método matemático axiomático. Definición axiomática de $\mathbb{R}$. Números naturales. Principio de inducción. Enteros y racionales. Raíces $n$-ésimas. Valor absoluto.

3. **Sucesiones de números reales**
   Convergencia. Sucesiones monótonas. Teorema de encaje de Cantor. Subsucesiones: teorema de Bolzano-Weierstrass. Sucesiones de Cauchy: completitud. Potencias de base real positiva y exponente real. Límites infinitos: tamaños. Algunas técnicas para el cálculo de límites.

4. **Límite funcional y continuidad**
   Límite de una función en un punto. Funciones continuas. Operaciones con funciones continuas. Funciones continuas en un intervalo: teoremas de Weierstrass y Bolzano. Continuidad y monotonía. Función inversa. Continuidad uniforme.
5. **Cálculo diferencial**
   Concepto de derivada en un punto. Funciones derivables: derivación de las funciones elementales. Extremos de funciones derivables. Teoremas del valor medio. Regla de l'Hôpital. Fórmula de Taylor. Funciones convexas. Estudio y representación gráfica de funciones.
6. **Cálculo integral**
   Introducción: aproximación al concepto de área. La integral de Riemann. Sumas de Riemann. Caracterizaciones de la integrabilidad y propiedades elementales. Concepto de longitud cero: teorema de Lebesgue. Teorema fundamental del cálculo y fórmula de Barrow. Cambio de variable e integración por partes. Aplicaciones de la integral.
7. **Series numéricas e integrales impropias**
   Introducción y justificación del tratamiento paralelo. Definiciones y primeras propiedades. Estudio del caso en el que el término general o el integrando sea positivo. Criterios de convergencia por comparación. Convergencia de integrales impropias y de series: el criterio de la integral. Propiedades asociativa (disociativa) y conmutativa de series. Convergencia absoluta y condicional. Criterios de convergencia para series e integrales impropias no absolutamente convergentes: criterios de Abel y Dirichlet. Sumación de algunas series.
8. **Series de potencias y funciones elementales**
   Números complejos. Límite de sucesiones de números complejos. Concepto de serie de potencias. Radio de convergencia. Propiedades de continuidad, derivabilidad e integrabilidad para la función suma. Funciones elementales: exponencial compleja y funciones elementales. Medida de los ángulos. Sumación de algunas series numéricas y de potencias.

La primera lección del curso está destinada al repaso del cálculo de derivadas y *antiderivadas*. La motivación para empezar la asignatura de esta forma está sustentada en los siguientes objetivos: repasar las herramientas de cálculo de derivadas y primitivas que el alumno ha visto en la Enseñanza Media y descubrir sus habilidades y carencias desde el punto de vista del *cálculo*; dar tiempo a que en la asignatura *Álgebra Básica* se explique el lenguaje algebraico-conjuntista fundamental que será necesario para fijar las propiedades de los números reales, objeto de la segunda lección.

En la Universidad de Murcia, los descriptores de la asignatura incluyen rudimentos de variable compleja, lo cual sirve para introducir, en la última lección del programa, el cuerpo $\mathbb{C}$, las sucesiones y series de complejos, la extensión a $\mathbb{C}$ de los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad, y las series de potencias en $\mathbb{C}$. Se presta atención especial a la exponencial compleja y a los desarrollos en serie de las funciones elementales.

## Objetivos concretos

*Conocer* y saber utilizar las propiedades de los números reales y de los otros conjuntos numéricos, en particular, el manejo de desigualdades y de las técnicas de inducción.

*Saber* discutir la existencia de límites de sucesiones en relación con la propiedad de Cauchy, la monotonía, o el teorema de Bolzano-Weierstrass.

*Adquirir* la capacidad de relacionar la existencia de límite funcional con la continuidad y con los límites de sucesiones. Conocer y saber utilizar los teoremas relativos a funciones continuas en intervalos: Bolzano (propiedad de los valores intermedios), Weierstrass (máximos y mínimos absolutos) y Heine (continuidad uniforme).

*Aprender* el concepto de derivada y adquirir las destrezas necesarias para el cálculo de derivadas de funciones concretas. Saber aplicar el cálculo de derivadas al análisis del comportamiento y la representación de funciones, así como a la resolución de problemas concretos que pueden ser abordados mediante el estudio de ciertas funciones.

*Comprender* el significado de los desarrollos de Taylor, y saber utilizarlos para realizar cálculos aproximados del valor de una función, para la discusión de problemas en los que estén involucradas comparaciones de funciones en términos de tamaños relativos (límites, convergencia de series e integrales impropias), y para la posibilidad de describir funciones mediante series de potencias (*polinomios infinitos*).

*Conseguir* las destrezas necesarias para evaluar integrales y calcular áreas, utilizando el teorema fundamental del cálculo, el cambio de variable, la integración por partes y las técnicas de cálculo de primitivas, incluyendo el cálculo de ciertas integrales impropias.

*Aplicar* las técnicas de derivación e integración de series de potencias para sumar series numéricas o series de potencias concretas.

## Bibliografía seleccionada

☞ T. M. Apostol, *Calculus*, segunda ed., Reverté, Barcelona, 1992.

☞ J. A. Fernández Viña and E. Sánchez Mañés, *Ejercicios y complementos de Análisis I*, cuarta ed., Tecnos, Madrid, 1992.

☞ J. M. Ortega, *Introducción al Análisis Matemático*, Labor, D. L., Barcelona, 1993.

☞ W. Rudin, *Principios de Análisis Matemático*, tercera ed., McGraw-Hill, Madrid, 1990.

# ANÁLISIS MATEMÁTICO II

| | |
|---|---|
| Código: | **0A6** |
| Nombre: | **Análisis matemático II** |
| Descripción BOE: | **Análisis de varias variables reales** |
| Tipo: | **Troncal (Primer ciclo)** |
| Créditos: | **15 (9.5T + 5.5P)** |
| Duración: | **Anual** |
| Contenidos: | **Programa** |

La asignatura *Análisis Matemático II* tiene como objetivo fundamental el estudio de las funciones de varias variables reales. Su estructura y contenidos son, por lo general, bastante coincidentes en muchas de las universidades que imparten la Licenciatura en Matemáticas. Ahora se trata con funciones $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: el núcleo esencial de la asignatura es el cálculo diferencial e integral de estas funciones de *varias variables*. Para muchas cuestiones a estudiar, el hecho de que $m > 1$ no añade demasiadas dificultades con relación al caso en el que $m = 1$. Sin embargo, el caso $n > 1$ confiere mayor libertad de movimiento, y a su vez, dificultades añadidas sobre el caso $n = 1$: podremos tomar límites y derivar según direcciones, hacer derivadas e integrar respecto de variables distintas e iterar el proceso. Esta mayor libertad en espacios de varias dimensiones nos permite definir y estudiar curvas y superficies en el espacio cuyo alcance va mucho más allá de las curvas estudiadas en *Análisis Matemático I* como gráficas de funciones reales de variable real. El concepto de diferencial de Fréchet y la integral de Riemann para funciones de varias variables son los objetos centrales del curso. Las aplicaciones a la Geometría y a la Física de las herramientas desarrolladas en *Análisis Matemático II* son sobresalientes.

## Objetivo de la asignatura

- Conocer y saber utilizar los conceptos y los resultados clásicos de:
  - Límites y continuidad de funciones de varias variables.
  - Cálculo diferencial de funciones vectoriales de una y varias variables.
  - Cálculo integral de funciones reales de varias variables.
  - Integrales curvilíneas y de superficie. Cálculo vectorial clásico.
- El alumno deberá conocer y comprender las demostraciones de los teoremas centrales de la teoría, y adquirir destreza en la resolución de problemas clásicos de cálculo diferencial e integral.

## Contenido

1. **Preliminares**
   Preliminares sobre espacios métricos y espacios normados. Continuidad uniforme y convergencia uniforme.
2. **Funciones derivables de variable real**
   Funciones vectoriales de variable real: derivación e integración. Teorema del incremento finito y desarrollo de Taylor. Funciones de variación acotada y longitud de un arco de curva.
3. **Funciones diferenciables**
   Funciones de varias variables reales: derivada según un vector y derivadas parciales. Aplicaciones diferenciables. Condición suficiente de diferenciabilidad. Regla de la cadena. Gradiente. Interpretaciones geométricas.
4. **Funciones varias veces diferenciables**
   Derivadas parciales de orden superior. Permutabilidad del orden de las derivaciones. Desarrollo de Taylor para funciones de varias variables. Extremos relativos.
5. **Funciones inversas e implícitas**
   Teorema de la función inversa. Cambios de variable y coordenadas curvilíneas. Funciones implícitas.
6. **Subvariedades diferenciables: extremos condicionados**
   Subvariedades de $R^n$. Extremos condicionados: método de los multiplicadores de Lagrange.
7. **La integral de Riemann**
   Integral de Riemann de funciones de varias variables. Técnicas de cálculo integral: integración reiterada y cambio de variable. Integrales dependientes de un parámetro: continuidad, derivación e integración.
8. **Técnicas de cálculo integral**
   Aplicaciones geométricas del cálculo integral. Área de una superficie e integración de funciones sobre superficies.
9. **Integral curvilínea**
   Integración curvilínea. Teorema de Green.
10. **Introducción al análisis vectorial**
    Integración de campos y formas diferenciales sobre superficies. Los teoremas clásicos del Análisis Vectorial.

## Objetivos concretos

*Profundizar* en los fundamentos topológicos del Análisis Matemático: compacidad, completitud, convergencia uniforme.

*Profundizar* en el estudio de las funciones vectoriales de variable real (funciones de variación acotada, curvas rectificables en el plano y en el espacio), y en sus aplicaciones físicas (centro de masa de un alambre, movimiento de una partícula, etc.).

*Analizar* propiedades de regularidad de funciones de varias variables: continuidad, continuidad uniforme, grado de diferenciabilidad, analiticidad, convexidad, etc.

*Razonar* con inversas locales y con funciones definidas implícitamente.

*Conocer* la noción de espacio tangente a una curva o superficie y saber obtener sus ecuaciones cuando ésta viene dada en forma explícita, implícita o paramétrica. Conocer el concepto general de subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}^n$ y el de espacio tangente a la misma en un punto.

*Conocer* los sistemas de coordenadas curvilíneas usuales (coordenadas polares, cilíndricas, esféricas, etc.) y saber utilizarlos, tanto para efectuar cambios de variable en operadores diferenciales sencillos (por ejemplo, el Laplaciano en coordenadas polares), como para calcular integrales múltiples.

*Conocer* y saber aplicar las técnicas del cálculo integral de varias variables (integración reiterada y cambio de variable) para calcular integrales múltiples.

*Resolver* problemas que impliquen el cálculo de integrales, procedentes de las aplicaciones geométricas y físicas del cálculo integral: volúmenes de sólidos (en particular, de revolución), masas y centros de masa, momentos de inercia, etc.

*Conocer* los resultados básicos del Análisis Vectorial clásico (integrales de línea y de superficie), y saber aplicarlos e interpretarlos en el lenguaje de la Física.

*Conocer* las condiciones que permiten intercambiar el orden de dos procesos sucesivos de paso al límite. Entender el papel que desempeña la convergencia uniforme en estos problemas.

*Conocer* y saber utilizar los resultados clásicos sobre continuidad y derivabilidad de funciones definidas mediante series o integrales que dependen de un parámetro.

*Utilizar* algún programa de representación gráfica de curvas y superficies en el espacio ordinario para interpretar geométricamente los conceptos básicos de la materia: visualización del comportamiento local de una función, de los puntos estacionarios en los problemas de extremos con ligaduras, de recintos de integración, etc.

## Bibliografía seleccionada


☞ T. M. Apostol, *Análisis Matemático*, segunda ed., Reverté, Barcelona, 1979.

☞ J. A. Facenda Aguirre and F. J. Freniche Ibáñez, *Integración de funciones de varias variables*, Pirámide, Madrid, 2002.

☞ J. A. Fernández Viña, *Análisis Matemático II (Topología y Cálculo Diferencial)*. *Análisis Matemático III (Integración y Cálculo Exterior)*, Tecnos, Madrid, 1992.

☞ W. Fleming, *Functions of Several Variables*, second ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1977. MR 54 #10514.

# Parte II

# Medida e Integración

# Medida e Integración

| | |
|---|---|
| Código: | **3A3** |
| Nombre: | **Medida e integración** |
| Descripción BOE: | **Medida e integración** |
| Tipo: | **Optativa abierta a Primer y Segundo ciclo** |
| Créditos: | **6 (3.5T + 2.5P)** |
| Duración: | **Cuatrimestral** |
| Contenidos: | **6 capítulos** |

Esta asignatura corresponde a un curso introductorio a la *Teoría de la Medida e Integración*, en el que se hace especial énfasis en la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. La teoría moderna de la medida e integración tuvo su origen a principios del siglo XX, fundamentalmente, a través de los trabajos de Lebesgue. La integral de Lebesgue evita algunas carencias de la integral de Riemann, resolviendo, por ejemplo, incongruencias que habían aparecido al estudiar las derivadas e integrales de funciones de variable real. Hoy en día, las ideas y técnicas de la integral de Lebesgue están bien asentadas, y son numerosas las parcelas de las matemáticas que se benefician de esta herramienta: Análisis, Geometría Diferencial, Probabilidades y Estadística, etc.

Para algunos de nosotros es incomprensible que una asignatura como ésta figure en un plan de estudios de la *Licenciatura en Matemáticas* como asignatura optativa, y no como asignatura obligatoria.

Debemos señalar que hemos optado por el método de Carathéodory para introducir los conceptos de medida e integral. Este método descriptivo de construcción de la integral está basado en ideas de tipo conjuntista y, a nuestro parecer, es más concreto, intuitivo y de mayor aplicabilidad que las construcciones basadas en el método de Daniell. El método de Daniell que tiene sus orígenes en la prueba del teorema de Riesz de representación de funcionales, permite llegar a la definición de integral y a sus propiedades rápidamente. En espacios euclídeos, este método sirve para construir la integral de Lebesgue como una extensión de la de Riemann. Para nosotros, es un objetivo primordial la construcción de la medida de Lebesgue como extensión de los conceptos (casi primitivos) de área y volumen. Fijados estos cimientos, la construcción de la integral la haremos de la forma más intuitiva para los alumnos, aproximando funciones medibles por funciones simples.

## Objetivo de la asignatura

- Adquirir un conocimiento profundo de los conceptos básicos de la Teoría de la Medida e Integración y de sus teoremas fundamentales.
- Adquirir experiencia para aplicar la teoría general a situaciones y problemas concretos.
- Conocer muestras representativas de la conexión de la teoría general con otras materias.

## Contenido

Hemos estructurado la asignatura en los seis capítulos que siguen:



El capítulo primero es preliminar, y está dedicado a las integrales de Riemann-Stieltjes y al planteamiento de los problemas de la integral y la medida. Mostramos, mediante ejemplos, las limitaciones de la integral de Riemann que hacen necesaria la generalización dada por Lebesgue.

En el capítulo segundo introducimos la terminología y los conceptos básicos de la teoría de la medida. Presentamos el método de Carathéodory y analizamos la medida de Lebesgue, para la que demostramos su unicidad (salvo constantes) entre las medidas definidas en los borelianos de $\mathbb{R}^n$ que son invariantes por traslaciones y asignan medida finita a los subconjuntos compactos. Introducimos las medidas de Borel regulares, abstrayendo las propiedades de la medida de Lebesgue, como herramienta a utilizar en la demostración del teorema de Riesz que se presenta en el capítulo sexto.

En el tercer capítulo nos ocupamos de estudiar la noción de medibilidad e integrabilidad de funciones. Estudiamos la aproximación de funciones medibles mediante funciones simples, y prestamos especial atención a las sucesiones convergentes de funciones medibles, demostrando los teoremas de Egoroff y de Lusin. A continuación, construimos la integral: primero, para funciones simples, luego, para funciones medibles positivas, y finalmente, para funciones medibles arbitrarias. Probamos los teoremas de convergencia monótona y dominada de Lebesgue, que son herramientas esenciales en no pocas situaciones. En el caso euclídeo, demostramos la densidad de las funciones continuas con soporte compacto en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Completamos el capítulo estudiando la integrabilidad respecto de medidas imágenes, lo que nos permite interpretar la integral (esperanza, como se llama en el mundo de las probabilidades) de funciones medibles (variables aleatorias) como la integral de Riemann-Stieltjes de la identidad respecto de la función de distribución.

En el cuarto capítulo nos ocupamos de las integrales reiteradas y del teorema del cambio de variable. En una primera parte, abordamos el teorema de Fubini sobre integración reiterada respecto de medidas producto, y en la segunda, damos el teorema de cambio de variable para aplicaciones diferenciables entre abiertos de $\mathbb{R}^n$.

En el capítulo quinto estudiamos la diferenciación de una medida con respecto a otra definida en la misma $\sigma$-álgebra. Establecemos que una medida se puede derivar respecto a otra si, y sólo si, están relacionadas vía la continuidad absoluta: teorema de Radon-Nikodým. Continuamos analizando, con más detalle, el caso en el que derivamos respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, tomando como punto de partida el teorema de diferenciación de Lebesgue. Terminamos con el caso particular $n = 1$, encontrando el teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue, el cual asegura que una función es derivable en casi todo punto de $[a,b]$, y que se puede recuperar como una primitiva de su derivada si, y sólo si, es absolutamente continua en $[a,b]$.

En el último capítulo, utilizamos herramientas de la teoría de la medida y la integral para estudiar algunos espacios de funciones básicos en el Análisis: los espacios de funciones continuas en espacios localmente compactos, y los espacios $L^p$, cuyas normas se definen en términos de integrales y que generalizan los espacios de funciones integrables. Prestaremos una atención especial a los espacios de Hilbert $L^2$. Este último capítulo puede considerarse a caballo entre la asignatura *Medida e Integración* y la asignatura *Análisis Funcional*, en la que se vuelven a estudiar/recordar algunos de los aspectos presentados aquí.

## Objetivos concretos

- *Utilizar* el método de extensión de Carathéodory para construir la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.
- *Conocer* las propiedades de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.
- *Comprender* las nociones de medibilidad e integrabilidad Lebesgue.
- *Relacionar* la integrabilidad Riemann y Lebesgue.
- *Estudiar* y utilizar los teoremas de convergencia asociados a la integral de Lebesgue.
- *Relacionar* la integral de Lebesgue con la integral de Riemann-Stieltjes respecto de funciones de distribución.
- *Demostrar* el teorema de Fubini.
- *Utilizar* el teorema de Fubini para calcular integrales concretas.
- *Demostrar* el teorema del cambio de variable para la integral de Lebesgue.
- *Utilizar* el teorema del cambio de variable para calcular integrales concretas.
- *Demostrar* el teorema de Radon-Nikodým.

*Establecer* el teorema de diferenciación de Lebesgue y el teorema fundamental del cálculo.
*Construir* los espacios $L^p$ y estudiar sus propiedades.
*Calcular* el dual del espacio $C_0(X)$: teorema de Riesz.

## Prerrequisitos

La asignatura tratará de hacerse de la forma más autocontenida posible. Partimos de que el alumno ha cursado las asignaturas: *Topología* (Troncal, primer ciclo, 6 créditos), *Análisis Matemático I y II* (Troncales, primer ciclo, 18 y 15 créditos).

## Bibliografía seleccionada


- ☞ D. L. Cohn, *Measure theory*, Birkhäuser, Boston, Mass., 1980. MR 81k:28001.
- ☞ G. B. Folland, *Real Analysis, modern techniques and their applications*, Wiley-Interscience, New York, 1999, Second edition. MR 2000c:00001, y 86k:28001.
- ☞ W. Rudin, *Análisis real y complejo*, tercera ed., McGraw-Hill, 1988.
- ☞ R. L. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and integral. An introduction to real analysis*, Pure and Applied Mathematics, vol. 43, Marcel Dekker Inc., New York, 1977. MR 58 #11295.

Capítulo 1

# La integral anterior a Lebesgue

**TEMARIO**



En este primer capítulo introductorio presentamos algunas de las razones históricas que dieron lugar a la extensión del concepto de integral y a la formalización de la noción de medida. Recordamos la integral de Riemann y, en particular, estudiamos la caracterización de Lebesgue de las funciones integrables en términos de los conjuntos de medida nula en $\mathbb{R}$. También revisamos la noción y las propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes, en la cual estamos interesados ya que la teoría de Lebesgue proporciona un tratamiento unificado a las integrales de Riemann y Riemann-Stieltjes, y porque además, como veremos, la integral de Lebesgue de cualquier función con respecto a una medida se puede interpretar como una integral de Riemann-Stieltjes respecto a su función de distribución, tal y como se hace en Teoría de Probabilidad al evaluar la esperanza de una variable aleatoria respecto a una medida de probabilidad.

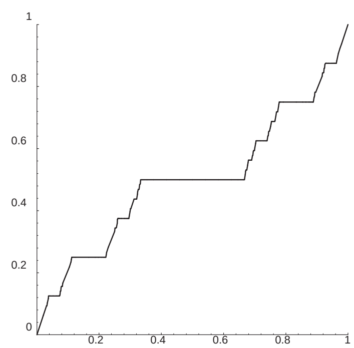
## Lección 1.1 La integral de Riemann.

- La integral antes de Lebesgue. Algunas referencias históricas.
- La integral de Riemann.
- Conjuntos de medida nula en $\mathbb{R}$. Caracterización de las funciones integrables Riemann.
- El conjunto de Cantor y algunas funciones asociadas.

*Descripción.* En esta lección planteamos el problema de la integral y la medida a partir de la idea geométrica de integral de una función real definida sobre un intervalo. Damos algunas referencias históricas sobre el desarrollo de la teoría de la medida y la integral, así como sus relaciones con otras parcelas de las matemáticas, [Die78, Leb28, Pes70]. Recordamos la integral de Riemann y exponemos, mediante determinados ejemplos, algunos de los problemas que plantea este método de integración, en relación con el paso al límite bajo la integral, la integral repetida, o la existencia de primitivas, [vRS82, sec. 1]. Definimos los conjuntos de medida nula en la recta real, y damos la caracterización de Lebesgue de las funciones integrables Riemann, [Ort93, p. 177-179]:

**Teorema 1.1.1 (Lebesgue).** *Sea $f$ una función acotada definida sobre el intervalo $[a,b]$. La función $f$ es integrable Riemann en $[a,b]$ si, y sólo si, el conjunto de puntos donde $f$ no es continua es de medida nula.*

Finalizamos la lección construyendo el conjunto de Cantor en $[0,1]$, como ejemplo de conjunto compacto no numerable y de medida nula, y la función singular de Cantor, que es creciente y constante en cada componente conexa del complementario del Cantor:




Definición recursiva de la función con el programa «Mathematica»:

```
f[x_,1]:= 3 x /2 /; 3 x < 1;
f[x_,1]:= 0.5 /; 1 <= 3 x < 2;
f[x_,1]:= 0.5+(3 x-2)/ 2 /; 2 <= 3x

f[x_,n_]:= 0.5 f[3 x,n-1] /; 1 > 3 x ;
f[x_,n_]:= 0.5+0.5 f[3 x-2,n-1] /; 2<3x;
f[x_,n_]:= 0.5 /; 1 <= 3x <= 2

Plot[f[x,7],{x,0,1}]
```

Figura 1.1: La función singular de Cantor □

**Lección 1.2 La integral de Riemann-Stieltjes.**

- Funciones de variación acotada. Teorema de descomposición de Hahn.
- La integral de Riemann-Stieltjes. Propiedades.
- Integrabilidad de las funciones continuas.
- Fórmula de integración por partes.
- La integral de Darboux-Stieltjes y su relación con la de Riemann-Stieltjes.

*Descripción.* Las funciones de variación acotada en un intervalo $[a,b]$ son las funciones que se pueden expresar como diferencias de funciones crecientes, y definen el espacio natural donde considerar las distribuciones que intervienen en la integral de Riemann-Stieltjes. La integral de Riemann-Stieltjes de una función $f$ respecto a una distribución $\varphi$ está definida por el límite de las sumas de Riemann-Stieltjes asociadas a particiones $P$:

$$\int_a^b f\,d\varphi = \int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\big(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\big).$$

En la presente lección, estudiamos las propiedades elementales de esta integral, [WZ77, cap. 2], prestando especial atención a la integral con respecto a funciones de variación acotada. En particular, comprobamos la integrabilidad de las funciones continuas y la validez de la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx,$$

para $f$ continua y $\varphi$ de clase $C^1$ en $[a,b]$. También recordamos la fórmula de integración por partes obtenida de la fórmula de sumación de Abel:

$$\int_a^b \varphi\,df = \big(f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)\big) - \int_a^b f\,d\varphi.$$

En el último apartado se recuerdan las acotaciones, por exceso y por defecto, de las sumas de Riemann-Stieltjes, que proporcionan las definiciones de las integrales superior e inferior de Darboux-Stieltjes y el concepto de función integrable en el sentido de Darboux-Stieltjes. Esta noción, en principio más general que la de Riemann-Stieltjes, coincide con aquélla al integrar funciones acotadas respecto a distribuciones continuas. $\square$

**Bibliografía utilizada en el capítulo:**
[Die78], [Leb28], [Ort93], [Pes70], [vRS82], [WZ77].

Capítulo 2

# Medidas y medidas exteriores

**TEMARIO**



En este capítulo introducimos la teoría de la medida, siguiendo el método de Carathéodory para construir y extender medidas. De manera informal, un *espacio de medida* es un conjunto en el que algunos subconjuntos tienen asignada una *medida*. Comenzamos describiendo las familias de subconjuntos, *álgebras* y $\sigma$-*álgebras*, sobre las que estarán definidas las *medidas*. Después, abordamos el método de Carathéodory para la construcción y extensión de medidas, y lo utilizamos para construir la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y las medidas de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}$.

**Lección 2.1 Álgebras y $\sigma$-álgebras.**

- Álgebras y $\sigma$-álgebras. Ejemplos.
- Generación de álgebras y $\sigma$-álgebras.
- Las $\sigma$-álgebras de Borel de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.

*Descripción.* Comenzamos estudiando las definiciones y las propiedades básicas de álgebra y $\sigma$-álgebra y, entre otros ejemplos, tratamos las álgebras y $\sigma$-álgebras generadas por una familia de conjuntos. La descripción de la $\sigma$-álgebra generada por una familia infinita de conjuntos no es demasiado sencilla. Haremos una aproximación en esta dirección con la $\sigma$-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$, generada por los subconjuntos abiertos, viendo la clasificación que se obtiene al ir construyendo, alternativamente, intersecciones numerables y uniones numerables: el desarrollo se inicia con la familia de los subconjuntos abiertos, y se repite el proceso utilizando inducción transfinita con índices en los ordinales numerables, [Coh80, sec. 1.1].

De especial interés son las $\sigma$-álgebras que se pueden generar a partir de una familia numerable de subconjuntos. Éste es el caso de las $\sigma$-álgebras de Borel de espacios topológicos cuyas topologías tienen base numerable. En particular, en $\mathbb{R}^n$, los borelianos se pueden generar con la familia numerable de los cubos diádicos (*i.e.*, cubos $n$-dimensionales con vértices de coordenadas $m_i 2^{-q}$, $m_i \in \mathbb{Z}$, y lados $2^{-q}$). De forma más concreta, tenemos el siguiente resultado:

**Lema 2.1.1.** *Todo abierto $G \subset \mathbb{R}^n$ se puede expresar como la unión de una sucesión de cubos diádicos semiabiertos, disjuntos dos a dos.*

Finalizamos la lección observando que las álgebras generadas por familias infinitas numerables son numerables, mientras que las $\sigma$-álgebras generadas por éstas ya no lo son. □

**Lección 2.2 Medidas.**

- Medidas. Espacios de medida.
- Conjuntos de medida nula.
- Medidas completas. Complección de una medida.

*Descripción.* Una vez establecida la noción de $\sigma$-álgebra, formalizamos el concepto de medida:

**Definición 2.2.1.** *Una función de conjunto $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0,\infty]$, definida en un álgebra $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, es una* medida finitamente aditiva *si $\mu(\emptyset) = 0$ y, para cada familia finita $\{A_i : 1 \leq i \leq n\} \subset \mathscr{A}$ que está formada por conjuntos disjuntos dos a dos, se verifica que $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(A)$, donde $A = \bigcup\{A_i : 1 \leq i \leq n\}$.*

*Una función de conjunto $\mu : \Sigma \longrightarrow [0,\infty]$, definida sobre una $\sigma$-álgebra $\Sigma$, es una* medida numerablemente aditiva *($\sigma$-aditiva) si $\mu(\emptyset) = 0$ y, para cada familia numerable $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Sigma$, formada por conjuntos disjuntos dos a dos, se cumple que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu\big(\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}\big)$. Si, además, $\mu(\Omega) = 1$, se dice que $\mu$ es una* probabilidad *(o una* medida de probabilidad*).*

Si en lugar de que $\mu$ tome valores en $[0,\infty]$ se supone que toma valores en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$, aparecen las nociones de medida real y compleja, objeto de estudio del capítulo 5. También introducimos el concepto de espacio de medida y de probabilidad, y estudiamos sus propiedades básicas.

El uso de conjuntos de medida nula y espacios de medida completos, que son los que contienen a todos los subconjuntos de conjuntos de medida nula, suele obviar muchas puntualizaciones técnicas. La completitud de un espacio de medida se puede alcanzar fácilmente, [Fol99, p. 26]:

**Teorema 2.2.2 (Teorema de Completitud de Lebesgue).** *Dado un espacio de medida $(\Omega,\Sigma,\mu)$, la familia $\Sigma_\mu = \big\{E \subset \Omega : \exists A,B \in \Sigma, A \subset E \subset B, \mu(B-A) = 0\big\} = \{A \cup N : N \text{ es } \mu\text{-nulo}, A \in \Sigma\}$ es una $\sigma$-álgebra que contiene a $\Sigma$, y además, la función de conjunto $\overline{\mu} : \Sigma_\mu \longrightarrow [0,\infty]$, definida por $\overline{\mu}(E) = \sup\big\{\mu(A) : A \subset E, A \in \Sigma\big\}$, es la única medida completa cuya restricción a $\Sigma$ es $\mu$.* □

**Lección 2.3 Medidas exteriores.**

- Medidas exteriores.
- Conjuntos medibles.
- Espacio de medida asociado a una medida exterior.
- Premedidas. Extensión de medidas.

*Descripción.* En esta lección estudiamos el método de Carathéodory de construcción de medidas a partir de medidas exteriores, método que utilizaremos en las lecciones siguientes para construir la medida de Lebesgue, entre otras.

El nombre de medida exterior proviene de la forma en que usualmente se construyen medidas:

*Ejemplo* 2.3.1. Sean $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ y $\rho : \mathscr{E} \longrightarrow [0,\infty]$ una aplicación tales que $\emptyset \in \mathscr{E}$, $\Omega \in \mathscr{E}$ y $\rho(\emptyset) = 0$. Entonces, la función

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n) : E_n \in \mathscr{E} \text{ y } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}$$

define una medida exterior sobre $\Omega$.

El teorema de Carathéodory determina, para cada medida exterior $\mu^*$, una $\sigma$-álgebra de conjuntos *medibles*, en la que $\mu^*$ es una auténtica medida, [Fol99, p. 29]:

**Teorema 2.3.2 (Carathéodory).** *Si $\mu^*$ es una medida exterior sobre $\Omega$, la familia de los conjuntos $\mu^*$-medibles es una $\sigma$-álgebra, y la restricción $\mu$ de $\mu^*$ a esta $\sigma$-álgebra es una medida completa.*

Completamos la lección con algunas aplicaciones clásicas de este resultado: extendemos *premedidas* definidas en un álgebra a la $\sigma$-álgebra que genera (teorema de extensión de Carathéodory), [Fol99, p. 31]; como consecuencia de esta extensión, deducimos un resultado de aproximación de los conjuntos de la $\sigma$-álgebra generada por un álgebra, con conjuntos de ésta, y volvemos a obtener la complección de una medida. $\square$

**Lección 2.4 Medidas de Lebesgue y Lebesgue-Stieltjes.**

- Medidas exteriores métricas.
- La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.
- Regularidad de la medida de Lebesgue.
- Invarianza por traslaciones.
- Existencia de conjuntos no medibles.

*Descripción.* Introduciendo la noción de medida exterior métrica en espacios métricos, [WZ77, sec. 11.2], conseguimos dar una única demostración de la medibilidad de los conjuntos de Borel con respecto a las medidas introducidas en esta lección y en la siguiente.

Definimos la medida exterior de Lebesgue para cada $A \subset \mathbb{R}^n$ utilizando la noción de volumen de un intervalo $n$-dimensional:

$$\lambda_n^*(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \text{Vol}\Big(\big[a(k),b(k)\big)\Big) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \big[a(k),b(k)\big) \right\}.$$

La medida exterior de Lebesgue asigna su volumen a cada intervalo, y es una medida exterior métrica; por tanto, todos los borelianos son medibles. Tras observar la regularidad de la medida de Lebesgue, y utilizando el lema 2.1.1, comprobamos que, salvo constantes, ésta es la única medida invariante por traslaciones y finita sobre los subconjuntos compactos. Concluimos la lección con la construcción de Vitali de un conjunto en $\mathbb{R}$ que no es medible Lebesgue, [vRS82, p. 145]. □

**Lección 2.5 Medidas de Borel regulares.**

- Medidas de Borel regulares.
- Medidas de Lebesgue-Stieltjes.
- Medidas de Hausdorff.

*Descripción.* Las buenas propiedades de regularidad de la medida de Lebesgue no son exclusivas de ésta. En la presente lección estudiamos la noción de medida de Borel regular en un espacio topológico, y comprobamos cómo todas las medidas de Borel definidas en espacios localmente compactos con abiertos $\sigma$-compactos, que sean finitas en los compactos, son medidas regulares, [Coh80, p. 206-207].

A continuación nos detenemos en las medidas de Borel de la recta real, mirándolas como distribuciones de masa y representándolas en términos de funciones de distribución como medidas de Lebesgue-Stieltjes; medidas que se construyen de forma análoga a la de Lebesgue, a partir de medidas exteriores métricas. Otro ejemplo de medida exterior métrica lo tenemos en las medidas exteriores de Hausdorff, [WZ77, sec. 11.4], que permiten medir en variedades diferenciables o hablar de conjuntos *fractales*:

**Definición 2.5.1.** *Dado un espacio métrico $(M,d)$, para cada $\alpha > 0$ y cada subconjunto $A \subset M$, se define*

$$H_\alpha^*(A) = \sup_{\varepsilon>0} \left\{ \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \big(\text{diam}(A_k)\big)^\alpha : A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \text{diam}(A_k) < \varepsilon \right\} \right\}.$$

Estas medidas verifican que si $H_\alpha^*(A) < \infty$, entonces $H_\beta^*(A) = 0$, para $\beta > \alpha$, y si $H_\alpha^*(A) > 0$, entonces $H_\beta^*(A) = \infty$, para $\beta < \alpha$. Por lo tanto, para cada subconjunto $A$, sólo existe un valor de $\alpha$ que permite medirlo; tal valor es la dimensión de Hausdorff de $A$. □

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Coh80], [Fol99], [Geo80], [vRS82], [WZ77].

Capítulo 3

# Integral asociada a una medida

**TEMARIO**



Empezamos este extenso capítulo estudiando las funciones medibles, que serán las funciones a integrar, analizando sus propiedades, con especial atención a la convergencia de sucesiones. A continuación construimos la integral asociada a una medida y establecemos sus principales propiedades. Vamos a hacer la construcción que más recuerda a la definición de integral de Riemann, utilizando la aproximación por funciones simples de las funciones medibles.

## Lección 3.1 Transformaciones y funciones medibles.

- Transformaciones y funciones medibles.
- El álgebra de las funciones medibles.
- El retículo de las funciones reales medibles.
- Límites de sucesiones de funciones medibles.
- Aproximación por funciones simples.
- Funciones medibles en espacios completos. Convergencia en casi todo punto.
- Funciones medibles Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

*Descripción.* En esta lección continuamos nuestra incursión en la construcción de la integral desde el punto de vista conjuntista, con las nociones de transformación medible entre dos espacios medibles y la de función medible valorada en $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}^n$.

**Definición 3.1.1.** *Dados dos espacios medibles* $(\Omega,\Sigma)$ *y* $(\Omega',\Sigma')$*, una aplicación* $f:\Omega \longrightarrow \Omega'$ *se dice que es* $(\Sigma,\Sigma')$*-medible cuando* $f^{-1}(E') \in \Sigma$*, para cada* $E' \in \Sigma'$*.*

Esta definición recuerda a la de función continua entre dos espacios topológicos: *la preimagen de cada conjunto abierto es un conjunto abierto*; de hecho, existe toda una dualidad entre la topología y la teoría de la medida, [Oxt71], que comenzamos a observar viendo cómo, para comprobar la medibilidad de una función, basta verificar que $f^{-1}(D) \in \Sigma$, para cada $D \in \mathscr{D}$, donde $\mathscr{D}$ es una familia que genera $\Sigma'$. Cuando $\Omega' = X$ (uno de los tres espacios $\mathbb{C},\mathbb{R},[-\infty,\infty]$), se dice que $f:\Omega \longrightarrow X$ es $\Sigma$-medible si $f$ es $\big(\Sigma,\mathscr{B}(X)\big)$-medible, es decir, si $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para cada conjunto de Borel $B \subset X$; o equivalentemente, si $f^{-1}(V) \in \Sigma$ para cada abierto $V \subset X$. También se pueden sustituir los abiertos por las familias de los intervalos o rectángulos semiabiertos, abiertos o cerrados.

Uno de los ejemplos más sencillos de funciones medibles lo tenemos en las funciones características de conjuntos $E \in \Sigma$,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

Otros ejemplos los proporcionan las funciones continuas entre espacios topológicos que son medibles respecto a las correspondientes $\sigma$-álgebras de Borel.

Estudiamos algunas propiedades elementales de las funciones medibles en relación a la composición, a las operaciones algebraicas, a las de retículo para funciones reales (máximos y mínimos de dos funciones reales, y valor absoluto), o a las de tomar el módulo, o las partes real e imaginaria, de las funciones complejas.

En relación con las funciones que se pueden definir a partir de una sucesión de funciones medibles, tenemos la siguiente proposición [WZ77, p. 53-54]:

**Proposición 3.1.2.** *Si* $f_n:\Omega \longrightarrow [-\infty,\infty]$ *es una sucesión de funciones medibles, las funciones* $\sup_n f_n(\omega)$*,* $\inf_n f_n(\omega)$*,* $\liminf_n f_n(\omega)$ *y* $\limsup_n f_n(\omega)$ *también son medibles.*

De aquí se deduce que el conjunto de puntos donde una sucesión de funciones medibles es convergente, es un conjunto medible, y la función límite es medible sobre él.

Las combinaciones lineales de funciones características de conjuntos de $\Sigma$, también llamadas *funciones simples*, forman un subespacio de funciones para las que es fácil definir la integral, tal y como estudiaremos en el siguiente capítulo. Por ahora, nuestro interés en ellas será comprobar que cualquier función medible se puede describir mediante una sucesión de funciones simples, [WZ77, p. 54]:

**Teorema 3.1.3.** *Si* $f:\Omega \longrightarrow [-\infty,\infty]$ *es medible, entonces existe una sucesión de funciones simples* $s_n:\Omega \longrightarrow [-\infty,\infty)$ *que converge puntualmente hacia* $f$*, siendo la convergencia uniforme en todo conjunto* $E \subset \Omega$ *donde* $f$ *esté acotada. Si además* $f \geq 0$*, la sucesión* $(s_n)_n$ *puede elegirse creciente,* $s_n \leq s_{n+1}$*.*

Cuando consideramos una medida definida en $\Sigma$, podemos hablar de propiedades que se satisfacen para casi todo punto (p.c.t.p.) como aquéllas que se cumplen en todos los puntos del complementario de un conjunto de medida nula. Si además el espacio de medida es completo, dos funciones que coincidan p.c.t.p. tendrán el mismo carácter de medibilidad, y los límites p.c.t.p. de sucesiones de funciones medibles también serán medibles. En el caso de que el espacio de medida no sea completo, podremos referirnos a su complección, en el sentido de que las funciones medibles respecto a la $\sigma$-álgebra completada serán las que coincidan p.c.t.p. con las funciones medibles respecto a la $\sigma$-álgebra original, [Coh80, sec. 2.2].

Por último, mirando la $\sigma$-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, que es la complección de la de Borel respecto a la medida de Lebesgue, observamos cómo las funciones continuas y las funciones integrables Riemann son funciones medibles Lebesgue (en virtud del Teorema 1.1.1). $\square$

**Lección 3.2 Convergencia de funciones medibles.**

- Convergencia en medida.
- Sucesiones de Cauchy en medida.
- Convergencia casi uniforme. El teorema de Egoroff.
- El teorema de Lusin para funciones medibles Lebesgue.

*Descripción.* La noción de convergencia en medida para una sucesión de funciones medibles queda establecida mediante la siguiente definición:

**Definición 3.2.1.** *Dado un espacio de medida $(\Omega,\Sigma,\mu)$, se dice que una sucesión de funciones medibles $(f_n)_n$ converge a una función medible $f$ en medida si, para cada $s > 0$,*

$$\lim_n \mu\Big(\big\{x : \big|f_n(x) - f(x)\big| > s\big\}\Big) = 0.$$

*Y se dice que $(f_n)_n$ es de Cauchy en medida si, para cada $s > 0$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $n_s$ tal que, para $n > m \geq n_s$, se verifica que*

$$\mu\Big(\big\{x : \big|f_n(x) - f_m(x)\big| > s\big\}\Big) < \varepsilon.$$

En el siguiente capítulo, relacionaremos esta noción con la convergencia de integrales, e incluso veremos que se puede interpretar en términos de convergencia para una métrica completa definida por una integral. De momento, en esta lección vamos a relacionarla con la convergencia puntual. La sucesión de funciones $f_m(x) = \chi_{[k/2^n,(k+1)/2^n]}(x)$, definidas en $[0,1]$, para $m = 2^n + k$, es un ejemplo de una sucesión que converge en medida hacia 0, pero que no converge para casi todo punto de $[0,1]$, [UD00, p. 61]. En consecuencia, convergencia en medida no implica convergencia para casi todo punto. Sin embargo, pasando a subsucesiones, sí se tiene un resultado positivo que, además, permite establecer un criterio de Cauchy para la convergencia en medida, [WZ77, p. 60]:

**Teorema 3.2.2.** *Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones medibles, definidas en $\Omega$, que es de Cauchy en medida. Entonces, existen $f$ medible y una subsucesión $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$, tales que $(f_{n_k})_k$ converge a $f$ para casi todo punto de $\Omega$.*

Recíprocamente, tenemos el teorema de Egoroff, que garantiza la convergencia casi uniforme, en conjuntos de medida finita, de las sucesiones que convergen puntualmente, [WZ77, p. 57]:

**Teorema 3.2.3 (Egoroff).** *Sean $E$ un conjunto de medida finita y $(f_n)_n$ una sucesión de funciones reales medibles que converge, p.c.t.p. de $E$, a una función $f$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto $F \in \Sigma$ tal que $F \subset E$, $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$ y $(f_n)_n$ converge hacia $f$ uniformemente en $F$.*

Como corolario, se sigue fácilmente que la convergencia para casi todo punto implica convergencia en medida sobre conjuntos de medida finita. Otra aplicación del teorema de Egoroff, de la regularidad de la medida de Lebesgue y del lema de Urysohn, es el teorema de Lusin, el cual afirma que, para cada función medible, es posible elegir un conjunto de medida pequeña, fuera del cual, la función original coincide con una función continua, [Coh80, p. 227]. Por último, concluimos fácilmente que cualquier función medible Lebesgue se puede describir como límite p.c.t.p. de una sucesión de funciones continuas con soporte compacto. □

**Lección 3.3 Integrales de funciones no negativas.**

- Integrales de funciones simples.
- Integrales de funciones no negativas.
- Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue.
- Algunas aplicaciones.

*Descripción.* Comenzamos la construcción considerando la integral de funciones simples con valores reales, y observando que, en el espacio de estas funciones, la integral es lineal y conserva el orden. A continuación, extendemos la integral a las funciones medibles no negativas:

**Definición 3.3.1.** *Si $f : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ es medible, se define*

$$\int f\,d\mu := \sup\left\{\int g\,d\mu : g \text{ simple},\ 0 \le g \le f\right\}.$$

*Si $E \in \Sigma$, se define*

$$\int_E f\,d\mu := \int \chi_E f\,d\mu.$$

Con esta definición, la integral conserva el orden, y de esta sencilla propiedad deducimos la desigualdad de Tchebychev, [WZ77, p. 68], y el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue, [Fol99, p. 50]:

**Teorema 3.3.2 (Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue).** *Si* $f_n : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ *es una sucesión creciente de funciones medibles y* $f : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ *es su límite puntual,* i.e.,

*(i)* $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le \infty$, *para todo* $x \in \Omega$, *y*

*(ii)* $f_n(x) \to f(x)$ *cuando* $n \to \infty$, *para todo* $x \in \Omega$,

*entonces* $f$ *es medible y*

$$\int f\,d\mu = \lim_n \int f_n\,d\mu.$$

Ahora, utilizando la aproximación por funciones simples, obtenemos que la integral de una suma de funciones es la suma de las integrales. También, como aplicación de este teorema de convergencia, estudiamos el teorema de Beppo-Levi y el lema de Fatou sobre series y sucesiones de funciones medibles, [Fol99, sec. 2.2], así como una prueba de que la integral indefinida asociada a una medida de una función positiva $g$, $\nu(E) := \int_E g\,d\mu$, es una medida que verifica

$$\int f\,d\nu = \int fg\,d\mu,$$

para cada $f$ positiva. En el capítulo 5 caracterizaremos las medidas que son integrales indefinidas. En esta lección y en el resto del capítulo, utilizaremos el espacio de la medida cardinal en conjuntos y la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, para proponer y analizar ejemplos. $\square$

### Lección 3.4 El espacio $L^1$ de las funciones integrables.

- Funciones integrables.
- La integral y los conjuntos de medida nula.
- El teorema de la convergencia dominada.
- Completitud de $L^1$. Convergencia en $L^1$ y convergencia en medida.

*Descripción.* Una vez definida la integral de las funciones positivas, utilizamos la estructura de retículo que presentan las funciones medibles para extender la integral a funciones con valores en $[-\infty,\infty]$ o en $\mathbb{C}$.

**Definición 3.4.1.** *Una función medible* $f : \Omega \longrightarrow [-\infty,\infty]$ *se dice que es integrable cuando son finitas las dos integrales* $\int f^+\,d\mu$ *e* $\int f^-\,d\mu$*, y se define*

$$\int f\,d\mu := \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu.$$

*Una función medible* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *se dice que es integrable cuando lo son sus partes real e imaginaria, y se define*

$$\int f\,d\mu := \int \mathrm{Re}\, f\,d\mu + i \int \mathrm{Im}\, f\,d\mu.$$

También definimos la integral de una función sobre un conjunto medible, comprobamos que el conjunto de las funciones integrables es un espacio vectorial, y vemos que la integral es lineal, conserva el orden (en el caso real) y verifica la desigualdad triangular, [Coh80, sec. 2.3].

Continuamos observando el comportamiento de la integral en relación con los conjuntos de medida nula; dos funciones que coinciden en casi todo punto tienen el mismo carácter de integrabilidad, y cuando son integrables, tienen las mismas integrales sobre cualquier conjunto medible. El recíproco también es cierto, pues una función medible es nula en casi todo punto si, y sólo si, sus integrales sobre cualquier conjunto medible son nulas. Considerando, en el espacio vectorial de las funciones integrables, la relación de equivalencia que establece la igualdad en casi todo punto, y pasando al cociente, podemos definir los espacios $L^1(\mu)$, donde tenemos definida la norma

$$\|f\|_1 = \int |f|\, d\mu.$$

En relación con el paso al límite bajo el signo integral, estudiamos el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

**Teorema 3.4.2 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue).** *Sea $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones integrables que converge en casi todo punto. Si existe una función integrable $g$ tal que $|f_n| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la función límite $f(\omega) := \lim_n f_n(\omega)$, definida para casi todo punto, es integrable, y se verifica que*

$$\lim_n \|f_n - f\|_1 = \lim_n \int |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

*En particular,* $\displaystyle\lim_n \int_A f_n\, d\mu = \int_A f\, d\mu$, *para cada $A$ medible.*

Una primera consecuencia es la densidad de las funciones simples en $L^1(\mu)$. Otro corolario es el teorema de Beppo-Levi sobre series de funciones integrables, del que deducimos la completitud del espacio normado $L^1(\mu)$. También probamos que la convergencia en norma de una sucesión de funciones integrables implica convergencia en medida y, por tanto, la existencia de subsucesiones convergentes p.c.t.p. En este punto, se podría proponer a los alumnos, como trabajo personal, el estudio de la noción de conjuntos de funciones uniformemente integrables, y de cómo, en estos conjuntos, coinciden los conceptos de convergencia en norma y en medida, [Fre01, p. 246]. □

**Lección 3.5 La integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.**

- La integral de Lebesgue como extensión de la de Riemann.
- Densidad de las funciones continuas en $L^1(\mathbb{R}^n)$.
- Integrales dependientes de un parámetro.

*Descripción.* Esta lección está dedicada al caso particular de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^n$, observando la integral de Lebesgue como una extensión de la de Riemann que incluye a las funciones absolutamente integrables en sentido impropio de Riemann, [Coh80, sec. 2.5].

Como aplicación de los teoremas de convergencia, demostramos la densidad de las funciones continuas con soporte compacto en el espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$, y damos condiciones suficientes para la continuidad, derivabilidad o integrabilidad Riemann de funciones definidas mediante integrales dependientes de un parámetro, [BRMV87, FAFI02, Geo80]. □

**Lección 3.6 Integrabilidad de funciones respecto a medidas imágenes.**

- Transformaciones medibles. Integrabilidad respecto a la medida imagen.
- Relación entre la integral asociada a una medida y la integral de Riemann-Stieltjes.

*Descripción.* En la lección 3.1.1 definimos las transformaciones medibles, que permiten levantar cualquier medida definida en el espacio de partida al de llegada, e introducir la noción de medida imagen:

**Definición 3.6.1.** *Sean $(\Omega,\Sigma,\mu)$ un espacio de medida, $(\Omega',\Sigma')$ un espacio medible y $f:\Omega\longrightarrow\Omega'$ una función medible. Si para cada $A\in\Sigma'$ se define $\nu(A):=\mu\big(f^{-1}(A)\big)$, obtenemos una medida $\nu:\Sigma'\longrightarrow[0,\infty]$ denominada medida imagen de $\mu$ a través de $f$, que se denota por $\mu f^{-1}$.*

Observando lo que ocurre en el caso de funciones simples y pasando al caso general aproximando por sucesiones de funciones simples, se comprueba, [Coh80, sec. 2.6], que si $\phi:\Omega'\longrightarrow\mathbb{C}$ es $\Sigma'$ medible, son equivalentes:

a) $\phi$ es $(\mu f^{-1})$-integrable.

b) $\phi\circ f$ es $\mu$-integrable.

Si $\phi$ es $(\mu f^{-1})$-integrable o si $\phi\geq 0$, se cumple que

$$\int\phi\,d\nu=\int\phi\circ f d\mu.$$

En particular, para funciones medibles $f$ con valores en $\mathbb{R}$ o en $[-\infty,\infty]$, las medidas imágenes son medidas de Borel en la recta real, que podemos interpretar en términos de las correspondientes funciones de distribución. Podemos entonces describir la integral de $f$ con respecto a una medida $\mu$ como la integral de la identidad $\phi(x)=x$ respecto a la medida imagen $\mu f^{-1}$, y ésta, como la integral de Riemann-Stieltjes de $\phi(x)=x$ respecto a la función de distribución de $\mu f^{-1}$ o de $f$.

Con esta interpretación de las integrales asociadas a una medida como integrales de Riemann-Stieltjes, establecemos la conexión necesaria entre la forma habitual de abordar la integración en el mundo de las probabilidades, interpretando las funciones medibles como variables aleatorias, y las integrales como la esperanza matemática de tales variables en términos de la integral de Riemann-Stieltjes de la identidad respecto a la función de distribución, [WZ77, sec. 5.4].

Por otra parte, podemos ver las integrales de Lebesgue-Stieltjes, asociadas a las medidas de Lebesgue-Stieltjes, como extensiones de la integral de Riemann-Stieltjes. Si consideramos distribuciones de integrales indefinidas de funciones integrables Lebesgue, $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, que son funciones continuas, por el teorema de la convergencia dominada podemos obtener la identidad

$$\int_a^b G(x)\,dF(x)=\int_a^b G(x)\,f(x)\,dx$$

para funciones continuas $G(x)$. A continuación, recuperando la fórmula de integración por partes de la integral de Riemann-Stieltjes (véase la lección 1.2), establecemos la fórmula de integración por partes:

**Proposición 3.6.2 (Fórmula de integración por partes).** *Si $f$ y $g$ son dos funciones integrables en $[a,b]$, $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ y $G(x)=\int_{x_1}^{x} g(t)\,dt$, donde $x_0$ y $x_1$ son puntos de $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx=F(b)G(b)-F(a)G(a)-\int_a^b G(x)\,f(x)\,dx. \qquad \square$$

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[BRMV87], [Coh80], [FAFI02], [Fre01], [Fol99], [Geo80], [Oxt71], [UD00], [WZ77].

Capítulo 4

# Integrales múltiples

**TEMARIO**



En este capítulo tratamos de reformular los teoremas del cálculo integral en varias variables en el marco de las integrales asociadas a medidas, en general, y de la integral de Lebesgue, en particular. Concretamente, en una primera sección, abordamos el teorema de Fubini sobre integración reiterada respecto a medidas producto, y en la segunda, damos el teorema de cambio de variable para aplicaciones diferenciables entre abiertos de $\mathbb{R}^n$.

## Medida Producto e Integración Reiterada

### Lección 4.1 Producto de medidas.

- $\sigma$-álgebra producto. Producto de medidas.
- Secciones de conjuntos y de funciones.
- Producto de medidas $\sigma$-finitas.
- Complección del espacio de medida producto.

*Descripción.* Dados $(\Omega_1,\Sigma_1)$ y $(\Omega_2,\Sigma_2)$, dos espacios medibles, y $\mu_1$, $\mu_2$, dos medidas definidas sobre estos espacios, vamos a estudiar la construcción de una medida $\mu$ en el producto cartesiano $\Omega_1 \times \Omega_2$, de forma que $\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$ si $A \in \Sigma_1$ y $B \in \Sigma_2$.

Para utilizar el método de Carathéodory de construcción de medidas, comenzamos describiendo los conjuntos que forman el álgebra generada por los rectángulos medibles $A \times B$ como la familia formada por uniones finitas de rectángulos disjuntos dos a dos. Tras comprobar que sobre este álgebra se puede definir la correspondiente premedida, el método de Carathéodory nos proporciona la medida producto en la $\sigma$-álgebra producto $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ generada por los rectángulos medibles [Fol99, p. 65]:

**Teorema 4.1.1.** *Dados dos espacios de medida $(\Omega_i,\Sigma_i,\mu_i)$, $i = 1,2$, existe una medida $\mu$ definida en $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ tal que $\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$, para cada rectángulo medible $A \times B$. Si, además, los espacios de medida $(\Omega_i,\Sigma_i,\mu_i)$, $i = 1,2$, son $\sigma$-finitos, entonces $\mu$ es la única medida definida en $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ de forma que $\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$, para cada rectángulo medible $A \times B$.*

Después de comprobar que las secciones

$$E_x := \{y \in \Omega_2 : (x,y) \in E\} \quad \text{y} \quad E^y := \{x \in \Omega_1 : (x,y) \in E\}$$

de conjuntos $E \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ están en $\Sigma_2$ y $\Sigma_1$, respectivamente, establecemos la siguiente fórmula para evaluar medidas producto, [Fol99, p. 66]:

**Teorema 4.1.2.** *Si los espacios de medida $(\Omega_i,\Sigma_i,\mu_i)$, $i = 1,2$, son $\sigma$-finitos y $E \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$, entonces la función $x \to \mu_2(E_x)$ es $\Sigma_1$-medible, y la función $y \to \mu_1(E^y)$ es $\Sigma_2$-medible. También se verifica que, para cada $E \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$, la medida producto viene dada por*

$$(\mu_1 \times \mu_2)(E) = \int_{\Omega_2} \mu_1(E^y)\, d\mu_2(y) = \int_{\Omega_1} \mu_2(E_x)\, d\mu_1(x). \tag{4.1}$$

Estudiamos los aspectos particulares de la medida producto, poniendo de manifiesto que, en general, el producto de dos espacios de medida completos puede ser un espacio de medida no completo. Esto plantea la conveniencia de considerar también la complección del espacio producto. En particular, estudiamos la medida de Lebesgue como producto de medidas. Para enunciar con claridad lo que sucede cuando se considera la medida de Lebesgue, conviene utilizar notaciones distintas para la medida de Lebesgue, $\lambda_n$, sobre la $\sigma$-álgebra de Borel $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, y para la medida de Lebesgue completa, $\overline{\lambda}_n$, sobre la $\sigma$-álgebra $\mathscr{M}(\lambda_n)$ de los conjuntos medibles Lebesgue. Con esta notación, tenemos, [Rud88, p. 190]:

**Proposición 4.1.3.** *Dados $p,q \in \mathbb{N}$, identificamos el producto cartesiano $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ con $\mathbb{R}^n$, para $n = p+q$. Entonces se verifica que*

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^p) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}^q), \quad \lambda_n = \lambda_p \times \lambda_q \quad y \quad \mathscr{M}(\lambda_p) \times \mathscr{M}(\lambda_q) \subset \mathscr{M}(\lambda_n),$$

*donde la inclusión es estricta (axioma de elección). Además, $\overline{\lambda}_p \times \overline{\lambda}_q$ es la restricción de $\overline{\lambda}_n$ a la $\sigma$-álgebra producto $\mathscr{M}(\lambda_p) \times \mathscr{M}(\lambda_q)$*

Puesto que $\mathscr{M}(\lambda_p) \times \mathscr{M}(\lambda_q)$ es una $\sigma$-álgebra intermedia entre $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathscr{M}(\lambda_n)$, se sigue que $\left(\mathbb{R}^n,\mathscr{M}(\lambda_n),\overline{\lambda}_n\right)$ es la complección del espacio producto $\left(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q,\mathscr{M}(\lambda_p) \times \mathscr{M}(\lambda_q),\overline{\lambda}_p \times \overline{\lambda}_q\right)$. Finalizamos la lección estableciendo la medida producto para cualquier familia finita de espacios de medida. $\square$

**Lección 4.2 El teorema de Fubini.**

- Teorema de Fubini.
- Cálculo de integrales.

*Descripción.* A la vista de la fórmula (4.1) no es difícil imaginar cómo realizar la integral de las funciones simples respecto a la medida producto, y por aproximaciones, utilizando los teoremas de convergencia, cómo hacer la integral de cualquier función medible, [Fol99, p. 67]:

**Teorema 4.2.1 (Fubini).** *Sean* $(\Omega_i,\Sigma_i,\mu_i)$, $i=1,2$, *espacios de medida* $\sigma$*-finitos, y consideremos el espacio producto* $\big(\Omega_1\times\Omega_2,\Sigma_1\times\Sigma_2,\mu_1\times\mu_2\big)$.

*a) Si* $f:\Omega_1\times\Omega_2\longrightarrow[0,\infty]$ *es* $\Sigma_1\times\Sigma_2$*-medible, entonces la función* $x\to\int f(x,y)\,d\mu_2(y)$ *es* $\Sigma_1$*-medible, la función* $y\to\int f(x,y)\,d\mu_1(x)$ *es* $\Sigma_2$*-medible, y se verifica que*

$$\int f\,d(\mu_1\times\mu_2)=\int\left(\int f(x,y)\,d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x)=\int\left(\int f(x,y)\,d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y).$$

*b) Si* $f:\Omega_1\times\Omega_2\longrightarrow\mathbb{C}$ *es medible y una de las dos integrales iteradas*

$$\int\left(\int\big|f(x,y)\big|\,d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x),\qquad\int\left(\int\big|f(x,y)\big|\,d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y)$$

*es finita, entonces* $f$ *es* $(\mu_1\times\mu_2)$*-integrable.*

*c) Si* $f:\Omega_1\times\Omega_2\longrightarrow\mathbb{C}$ *es* $(\mu_1\times\mu_2)$*-integrable, entonces* $f_x$ *es* $\mu_2$*-integrable para casi todo* $x\in\Omega_1$, $f^y$ *es* $\mu_1$*-integrable para casi todo* $y\in\Omega_2$*, la función* $x\to\int f(x,y)\,d\mu_2(y)$ *(definida p.c.t.* $x\in\Omega_1$*) es* $\mu_1$*-integrable, la función* $y\to\int f(x,y)\,d\mu_1(x)$ *(definida p.c.t.* $y\in\Omega_2$*) es* $\mu_2$*-integrable, y se verifica que*

$$\int f\,d(\mu_1\times\mu_2)=\int\left(\int f(x,y)\,d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x)=\int\left(\int f(x,y)\,d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y).$$

Si trabajamos con la complección $(\Omega,\Sigma_\mu,\overline{\mu})$ del espacio producto $\big(\Omega_1\times\Omega_2,\Sigma_1\times\Sigma_2,\mu_1\times\mu_2\big)$ y $f$ es $\Sigma_\mu$-medible, se verifican las conclusiones del teorema 4.2.1 con la siguiente diferencia: la $\Sigma_2$-medibilidad de $f_x$ y la $\Sigma_1$-medibilidad de $f^y$ sólo se pueden asegurar en casi todo $x\in\Omega_1$ y en casi todo $y\in\Omega_2$, respectivamente, y las funciones $x\to\int f(x,y)\,d\mu_2(y)$ e $y\to\int f(x,y)\,d\mu_1(x)$ del apartado *a)* sólo se pueden considerar definidas en casi todo punto.

Completamos la lección observando cómo el teorema de Fubini proporciona criterios para establecer y calcular integrales de funciones de varias variables, [Geo80]. $\square$

**Lección 4.3 Aplicaciones del teorema de Fubini.**

- Recinto de ordenadas de una función medible.
- Convolución de funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$.
- Simetrización de conjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$. La constante de normalización de la medida de Hausdorff.
- Un teorema de Marcinkiewicz.

*Descripción.* Completamos la sección estudiando algunas aplicaciones del teorema de Fubini, [Rud88, cap. 8], [FAFI02, cap. 4], [WZ77, sec. 6.3], [Bil79, p. 211]: la interpretación geométrica clásica de la integral como área del recinto de ordenadas, la definición del producto de convolución en $L^1(\mathbb{R}^n)$, y un resultado clásico en el que se utiliza la simetrización de Steiner respecto a hiperplanos, que establece que la medida de Lebesgue de un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ es menor que la de la bola que tiene su mismo diámetro (teorema de Bieberbach, 1915).

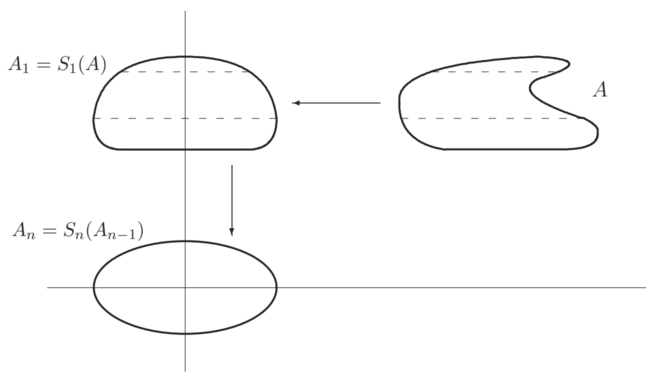



Figura 4.1: Haciendo la simetrización de Steiner respecto a los hiperplanos perpendiculares a los ejes coordenados, pasamos de $A$ a $A_1 = S_1(A),\dots,A_n = S_n(A_{n-1})$; $A_n$ es simétrico respecto al origen, tiene el mismo volumen que $A$ y menor diámetro □

## Cambio de Variable en $\mathbb{R}^n$

La fórmula

$$\int_{\Omega'} f\, d(\mu g^{-1}) = \int_{\Omega} f \circ g\, d\mu,$$

establecida en la lección 3.6, proporciona un primer Teorema de cambio de variable para evaluar integrales abstractas, donde $g : (\Omega,\Sigma) \longrightarrow (\Omega',\Sigma')$ es una función medible, $\mu$ una medida definida en $\Sigma$ y $\mu g^{-1}$ es la medida imagen definida sobre $\Sigma'$. En esta sección, abordamos el teorema del cambio de variable para la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, lo que permite simplificar el cálculo de integrales.

**Lección 4.4 El teorema del cambio de variable en $\mathbb{R}^n$.**

- Transformaciones lineales en el espacio $\mathbb{R}^n$.
- Difeomorfismos entre abiertos de $\mathbb{R}^n$.
- El teorema del cambio de variable.
- El teorema de Sard.
- Cambio de variable en $\mathbb{R}^n$. Coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$.

*Descripción.* Comenzamos considerando transformaciones lineales biyectivas $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, y observando que éstas llevan conjuntos medibles Borel en conjuntos medibles Borel; además, como son lipschitzianas, también transforman conjuntos medibles Lebesgue en conjuntos medibles Lebesgue. La invarianza por traslaciones de la medida de Lebesgue proporciona la fórmula

$$\lambda_n\big(T(E)\big) = \lambda_n\big(T([0,1]^n)\big)\lambda_n(E) = |\det T|\lambda_n(E),$$

de donde se sigue un primer resultado, [Fol99, p. 73]:

**Teorema 4.4.1.** *Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal inversible. Entonces, para cada función medible Borel (medible Lebesgue) positiva o integrable, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, se verifica que*

$$\int_{T(\mathbb{R}^n)} f\, d\lambda_n = \int f \circ T\, |\det T|\, d\lambda_n.$$

Continuamos trabajando con aplicaciones diferenciables de clase $C^1$ que se aproximan bien por aplicaciones lineales y que son localmente lipschitzianas. Con estas dos ideas, establecemos el teorema principal, [Fol99, p. 74]:

**Teorema 4.4.2.** *Sean $U$ y $V$ dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $T : U \longrightarrow V$ un $C^1$-difeomorfismo. Entonces:*

*(i) Para cada $A \subset U$ medible Borel (medible Lebesgue),*

$$\lambda_n\big(T(A)\big) = \int_A \big|\det D_x T\big|\, d\lambda_n(x).$$

*(ii) Para cada función $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ medible Borel (medible Lebesgue), positiva o integrable,*

$$\int_V f\, d\lambda_n = \int_U f \circ T(x)\big|\det D_x T\big|\, d\lambda_n(x).$$

Las aplicaciones lineales no inyectivas tienen como imágenes subespacios vectoriales de medida nula. El teorema de Sard muestra que, para aplicaciones diferenciables de clase $C^1$, se tiene que $\lambda_n\Big(T\big(\{x : \big|\det D_x T\big| = 0\}\big)\Big) = 0$, [Sch67, vol. 2, p. 673-676]. Este resultado permite suavizar las hipótesis del teorema del cambio de variable, donde bastará considerar transformaciones diferenciables de clase $C^1$ que son inyectivas al restringirlas al abierto en el que las diferenciales son invertibles. La prueba propuesta para este resultado se basa en argumentos de compacidad y en el siguiente lema de cubrimiento tipo Vitali, que utilizaremos en el capítulo siguiente.

**Lema 4.4.3.** *Sea $W$ la unión de una colección finita de bolas $B(x_i,r_i)$, con $1 \leq i \leq N$. Entonces, existe un subconjunto $S \subset \{1,\dots,N\}$ tal que:*

*(i)* *Las bolas $B(x_i,r_i)$, para $i \in S$, son disjuntos dos a dos.*
*(ii)* $W \subset \bigcup_{i\in S} B(x_i,3r_i)$.
*(iii)* $\lambda_n(W) \leq 3^n \sum_{i\in S} \lambda_n\big(B(x_i,r_i)\big)$.

Completamos la lección dando algunos ejemplos de cambio de variable, como las coordenadas polares en el plano y en el espacio, o las coordenadas cilíndricas en el espacio, deteniéndonos especialmente en el cambio a coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, [dGR79, sec. 6.4]. En todos los cambios a coordenadas polares se observa la medida de Lebesgue como medida imagen de una medida producto $\rho \times \sigma_{n-1}$, donde $\rho$ está definida en la semirrecta $(0,\infty)$, con $d\rho = r^{n-1}dr$, y $\sigma_{n-1}$ es una medida definida en la esfera unidad $S^{n-1}$. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se identifica con el producto $(0,\infty)\times S^{n-1}$ mediante la biyección $\Phi(x) = \big(\|x\|_2, x/\|x\|_2\big)$.

Sin necesidad de hacer una descripción detallada de $\sigma_{n-1}$ para $n \geq 3$, podemos establecer el siguiente teorema de cambio a coordenadas polares, [Fol99, p. 78]:

**Teorema 4.4.4.** *Existe una única medida de Borel, $\sigma_{n-1}$, definida en $S^{n-1}$, tal que, si $\rho$ es la medida de Borel en $(0,\infty)$ definida por $\rho(E) = \int_E r^{n-1}\,dr$, entonces $\lambda_n = \sigma_{n-1}\times\rho$ y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,d\lambda_n(x) = \int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} f(ry)r^{n-1}\,d\sigma_{n-1}(y)\right)dr,$$

*para cada función medible Borel, positiva o integrable, $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.*

Gracias a esta fórmula podemos medir conjuntos en la esfera unidad y calcular algunas integrales. En particular, podemos evaluar las medidas de la esfera y la bola unidad de $\mathbb{R}^n$:

$$\sigma_{n-1}(S^{n-1}) = \frac{2\big(\sqrt{\pi}\big)^n}{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}, \qquad \lambda_n(B^n) = \frac{\big(\sqrt{\pi}\big)^n}{\Gamma\big(\frac{n}{2}+1\big)}. \qquad \square$$

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Bil79], [Coh80], [FAFI02], [Geo80], [dGR79], [Rud88], [Sch67], [WZ77].

Capítulo 5

# Diferenciación

**TEMARIO**



En este capítulo vamos a estudiar la diferenciación de una medida con respecto a otra definida en la misma $\sigma$-álgebra. Comenzamos trabajando con medidas abstractas, y estudiando el teorema de Lebesgue-Radon-Nikodým, uno los resultados fundamentales en la teoría de la medida y en probabilidad. Continuamos analizando, con más detalle, el caso en el que derivamos respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, tomando como punto de partida el teorema de diferenciación de Lebesgue. Terminamos con el caso particular $n = 1$, encontrando la versión del teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue.

## Lección 5.1 Medidas signadas y complejas.

- Medidas signadas y complejas.
- Descomposición de Hahn-Jordan.
- Medidas de variación acotada.

*Descripción.* Vamos a comenzar permitiendo que las medidas tomen valores reales negativos (medidas signadas), e incluso complejos (medidas complejas). Los primeros ejemplos de estas medidas son las integrales indefinidas:

*Ejemplo* 5.1.1. Si $f : (\Omega,\Sigma,\mu) \longrightarrow [-\infty,\infty]$ o $\mathbb{C}$ es una función medible positiva o una función integrable, entonces la aplicación $\nu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$ definida por $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$ verifica la siguiente condición de $\sigma$-aditividad: para cada sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos, $A_n \in \Sigma$, $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$.

Escribimos $f = f^+ - f^-$, donde $f^+ = \text{máx}\{f,0\}$ y $f^- = -\text{mín}\{f,0\}$. Considerando los conjuntos $\Omega^+ = \{\omega : f(\omega) \geq 0\}$ y $\Omega^- = \{\omega : f(\omega) < 0\}$, podemos partir el espacio $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$. Si ahora definimos

$$\nu^+(E) := \nu(E \cap \Omega^+) = \int_E f^+ \, d\mu, \quad \text{y} \quad \nu^-(E) := \nu(E \cap \Omega^-) = \int_E f^- \, d\mu,$$

tanto $\nu^+$ como $\nu^-$ son dos medidas positivas, y además, $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

Utilizando las nociones de conjuntos positivos y negativos y de medidas mutuamente singulares, es posible obtener una descomposición análoga para cualquier medida signada, [Coh80, p. 124-125]:

**Teorema 5.1.2 (Teorema de descomposición de Hahn-Jordan).** *Sean $(\Omega,\Sigma)$ un espacio medible y $\nu : \Sigma \longrightarrow [-\infty,\infty]$ una medida signada. Entonces, existen $\Omega^+$ y $\Omega^- \in \Sigma$ tales que $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$, $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, $\Omega^+$ es positivo y $\Omega^-$ es negativo. Además, la descomposición anterior es única, en el sentido de que si $\Omega = P \bigcup N$, con $P,N \in \Sigma$, $P$ positivo y $N$ negativo, entonces $\Omega^+ \triangle P$ y $\Omega^- \triangle N$ son nulos.*

*Además, si se definen $\nu^+(E) = \nu(E \cap \Omega^+)$ y $\nu^-(E) = -\nu(E \cap \Omega^-)$, $\nu^+$ y $\nu^-$ son las dos únicas medidas positivas, mutuamente singulares, tales que $\nu = \nu^+ - \nu^-$.*

En el espacio de las medidas signadas definidas en una $\sigma$-álgebra, se tiene la relación de orden $\nu \preceq \eta$ si $\nu(A) \leq \eta(A)$, para cada $A \in \Sigma$. Si además $\nu$ y $\eta$ son finitas, $\nu \preceq \eta$ si, y sólo si, $\eta - \nu$ es una medida positiva. De forma análoga a como se define el valor absoluto de un número real, se define la *variación total* de una medida signada $\nu$ como la medida positiva dada por la igualdad

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^- = \sup_{\preceq}\{\nu, -\nu\}.$$

Si $|\nu|(\Omega) < \infty$, se dice que la medida signada $\nu$ es de *variación acotada* o que es finita (pues esto ocurre si, y sólo si, $\nu$ toma valores finitos). El significado de la terminología *variación total* quedará más claro cuando, al final de este capítulo, representemos las medidas signadas sobre los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$ mediante sus funciones de distribución. De momento podemos empezar a observarlo señalando que

$$|\nu|(A) = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{n} \left|\nu(A_k)\right| : A_k \in \Sigma, A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, A_i \cap A_k = \emptyset, \text{ si } i \neq k \right\}.$$

Esta fórmula permite definir la variación total de las medidas complejas. Además, toda medida compleja es de variación acotada.

Finalizamos la lección observando que, tanto el espacio de las medidas signadas, $\text{ca}(\Sigma,\mathbb{R})$, como el espacio de las medidas complejas, $\text{ca}(\Sigma,\mathbb{C})$, con la norma $\|\nu\| = |\nu|(\Omega)$, son espacios de Banach, [Coh80, p. 128], y que, identificando las funciones integrables con sus integrales indefinidas, los espacios $L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ son subespacios cerrados de $\text{ca}(\Sigma)$. $\square$

**Lección 5.2 El teorema de Radon-Nikodým.**

- Medidas absolutamente continuas.
- El teorema de descomposición de Lebesgue.
- El teorema de Lebesgue-Radon-Nikodým.
- Integral asociada a una medida compleja.
- Esperanza condicional.

*Descripción.* En esta lección vamos a caracterizar las medidas signadas o complejas que se pueden representar como integrales indefinidas. La simple propiedad de la integral

$$\int_N f\,d\mu = 0, \ \ \textit{para cada} \ \ N \in \Sigma \ \ \textit{con} \ \ \mu(N) = 0, \ \ \textit{y cada} \ \ f \in L^1(\mu),$$

proporciona la noción de medida absolutamente continua:

**Definición 5.2.1.** *Dadas dos medidas signadas o complejas, $\nu$ y $\eta$, definidas en $\Sigma$, se dice que $\nu$ es absolutamente continua respecto a $\eta$, y se denota por $\nu \ll \eta$, cuando $|\nu|(A) = 0$ (*i.e.*, $A$ es $\nu$-nulo) para cada subconjunto $A \in \Sigma$ que sea $\eta$-nulo (*i.e.*, $|\eta|(A) = 0$).*

La razón por la que se utiliza esta terminología de continuidad es la siguiente: dadas $\nu$ y $\eta$ dos medidas signadas o complejas de variación acotada definidas en $\Sigma$, $\nu$ es absolutamente continua respecto a $\eta$ si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, es posible encontrar un número $\delta > 0$ tal que $|\nu|(A) < \varepsilon$ cuando $A \in \Sigma$ y $|\eta|(A) < \delta$.

El teorema de descomposición de Lebesgue muestra cómo, dadas dos medidas de variación total $\sigma$-finita, siempre es posible descomponer una de ellas en dos partes que son, respectivamente, absolutamente continua y mutuamente singular respecto a la otra medida. El resultado central de esta lección es el teorema de Lebesgue-Radon-Nikodým [Coh80, p. 132]:

**Teorema 5.2.2 (Lebesgue-Radon-Nikodým).** *Sean $\nu$ una medida signada o compleja de variación acotada y $\mu$ una medida positiva $\sigma$-finita, tales que $\nu$ es absolutamente continua respecto a $\mu$. Entonces, existe una función $f \in L^1(\mu)$ de forma que $\nu$ es la integral indefinida de $f$ respecto a $\mu$,* i.e., *para cada conjunto $A \in \Sigma$ se verifica que*

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu.$$

*La función $f$ es única (salvo conjuntos de medida nula). Se suele decir que $f$ es la derivada de Radon-Nikodým de $\nu$ respecto a $\mu$, y se denota por $d\nu = f\,d\mu$ o $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.*

Concluimos la lección con algunas aplicaciones del teorema anterior, dejando para más adelante su utilización en la representación de funcionales lineales mediante integrales en espacios de funciones. En primer lugar, observamos cómo se pueden integrar funciones respecto a medidas signadas o complejas, utilizando sus descomposiciones en partes (reales e imaginarias) positivas y negativas: si $\nu$ es una medida signada sobre $(\Omega,\Sigma)$,

$$L^1(\nu) = L^1(\nu^+) \cap L^1(\nu^-), \quad \text{y} \quad \int f\,d\nu = \int f\,d\nu^+ - \int f\,d\nu^-;$$

para una medida compleja $\nu = \nu_1 + i\nu_2$, se define

$$L^1(\nu) = L^1(\nu_1) \cap L^1(\nu_2), \quad \text{y} \quad \int f\,d\nu = \int f\,d\nu_1 + i\int f\,d\nu_2.$$

En ambos casos, como $\nu \ll |\nu|$, el teorema de Radon-Nikodým proporciona una única función $g = \frac{d\nu}{d|\nu|}$ tal que $\nu(A) = \int_A g\,d|\nu|$. Además, $\big|g(\omega)\big| = 1$ en casi todo punto, [Rud88, p. 141], lo que permite comprobar que

$$L^1(\nu) = L^1\big(|\nu|\big), \quad \int f\,d\nu = \int fg\,d|\nu|, \quad \text{y que} \quad \left|\int f\,d\nu\right| \le \int |f|\,d|\nu|.$$

La derivada de Radon-Nikodým es fácil de describir en el caso discreto. Cuando $\Sigma$ es un álgebra finita, existe una partición $A_0,\dots,A_m$ de conjuntos de $\Sigma$, disjuntos dos a dos, tales que $\Omega = \bigcup_{k=0}^m A_k$, $\mu(A_0) = 0$, $\mu(A_k) > 0$ para $k \ne 0$, y cualquier conjunto de $\Sigma$ se puede escribir como una unión finita de átomos $A_k$ y un conjunto $\nu$-nulo. Con esta descomposición, la derivada de Radon-Nikodým de $\nu$ respecto a $\mu$ viene dada por la fórmula

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \sum_{k=1}^m \frac{\nu(A_k)}{\mu(A_k)}\chi_{A_k}.$$

Esta fórmula recuerda la noción de *esperanza condicional* de la teoría de probabilidad. El teorema de Radon-Nikodým permite definir las esperanzas condicionales en situaciones generales.

Esta conexión con las probabilidades abre la posibilidad de proponer a los alumnos, como trabajo personal, el estudio de la noción de martingala y del teorema de convergencia de martingalas, que es equivalente al resultado de Radon-Nikodým, [Ash72, cap. 2 y 4]. □

**Lección 5.3 Diferenciación.**

- El teorema de diferenciación de Lebesgue.
- Diferenciación de medidas en $\mathbb{R}^n$ respecto a la medida de Lebesgue.
- Otros teoremas de cambio de variable.
- El lema de Besicovitch. Diferenciación relativa de medidas. Una extensión del teorema de Sard.

*Descripción.* Trabajando con funciones reales, el teorema fundamental del cálculo relaciona la integral con el cálculo de primitivas o antiderivadas, y es bien conocido en los siguientes términos:

*si* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *es integrable sobre los intervalos cerrados y acotados centrados en* $x_0$, *y es continua en* $x_0$, *entonces*

$$f(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt=\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\int_{x_0-r}^{x_0+r}f(t)\,dt.$$

El teorema de diferenciación de Lebesgue es una extensión de este resultado para funciones localmente integrables Lebesgue definidas en $\mathbb{R}^n$, [Fol99, p. 98]:

**Teorema 5.3.1 (Teorema de diferenciación de Lebesgue).** *Si* $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, *entonces su integral indefinida es derivable en casi todo punto* $x$ *con derivada* $f(x)$, *es decir,*

$$f(x)=\lim_{Q\searrow x}\frac{1}{\lambda_n(Q)}\int_Q f\,d\lambda_n \quad \text{para casi todo } x,$$

*donde* $Q$ *varía en los cubos centrados en* $x$.

La prueba propuesta consiste en aproximar $f$ mediante funciones continuas con soporte compacto, controlando los errores de aproximación en los cocientes incrementales con la función maximal de Hardy-Littlewood y el lema de cubrimiento 4.4.3 (véanse [Fol99, p. 95-98], [Rud88, p. 154-160] o [WZ77, p. 104-107]). Comprobamos también que, para cualquier función localmente integrable $f$, casi todos los puntos $x$ cumplen la condición más fuerte

$$\lim_{Q\searrow x}\frac{1}{\lambda_n(Q)}\int_Q\big|f(t)-f(x)\big|\,d\lambda_n(t)=0$$

(puntos de Lebesgue de $f$).

Utilizando el teorema de descomposición de Lebesgue de cualquier medida de Borel en $\mathbb{R}^n$, extendemos el teorema de diferenciación de Lebesgue a las medidas, [Fol99, p. 99], para lo cual basta comprobar que la derivada de las medidas singulares con respecto a la de Lebesgue es nula en casi todo punto:

**Teorema 5.3.2.** *Si* $\mu$ *es una medida signada o compleja, definida sobre la* $\sigma$*-álgebra de Borel de* $\mathbb{R}^n$, *que es finita sobre los conjuntos acotados, entonces,* $\lambda_n$*-p.c.t.* $x\in\mathbb{R}^n$, *y para cada familia* $S$ *que se contrae bien a* $x$, *existe el límite*

$$f(x)=\lim_{S\searrow x}\frac{\mu(S)}{\lambda_n(S)}.$$

*Además, la función* $f$ *definida mediante este límite, coincide con la derivada de Radon-Nikodým de la parte absolutamente continua de* $\mu$ *respecto a la medida de Lebesgue* $\lambda_n$, i.e.,

$$d\mu=f\,d\lambda_n+d\mu_s,$$

*donde* $\mu_s$ *es una medida mutuamente singular respecto a* $\lambda_n$.

A continuación, hacemos uso del lema de cubrimiento de Besicovitch para extender el teorema anterior a cualquier par de medidas de Borel regulares, [WZ77, p. 189]. Por último, utilizamos el teorema de Radon-Nikodým para dar otra prueba, y algunas sencillas extensiones, del teorema del cambio de variable, [dG80], y estudiamos una generalización del teorema de Sard a funciones integrables, [dGR79, cap. 9]. □

**Lección 5.4 Funciones de variación acotada.**

- Diferenciación de funciones monótonas.
- Funciones de variación acotada.
- Funciones absolutamente continuas.
- Medidas y funciones singulares.

*Descripción.* En esta lección vamos a utilizar la biyección existente entre las medidas de Borel regulares positivas en $\mathbb{R}$ y las funciones monótonas crecientes, que resulta al identificar las medidas con sus distribuciones a través de las correspondientes medidas de Lebesgue-Stieltjes.

Aplicando en este contexto los teoremas de descomposición y diferenciación de Lebesgue, obtenemos la derivabilidad de las funciones monótonas crecientes $F$ en casi todo punto, con derivadas localmente integrables, y que

$$\int_{(a,b)} F'(x)\,dx \le F(b^-) - F(a^+),$$

en cada intervalo $(a,b)$. Se pueden encontrar otras demostraciones de este teorema de diferenciación que no pasan por la biyección entre funciones y medidas. Recomendamos la lectura del libro de Wheeden-Zygmund, [WZ77], donde se realiza una prueba con un lema de cubrimiento del mismo tipo que el lema 4.4.3, y la del libro de VanRooij-Schikhof, [vRS82, sec. 4], donde aparece la más clásica que utiliza el lema del sol poniente.

Pensando en términos de distribuciones, identificamos las funciones de variación acotada (estudiadas en el primer capítulo) con las medidas signadas y complejas. Para describir las funciones de variación acotada que definen medidas absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue, estudiamos la noción de función absolutamente continua. Gracias a los resultados de diferenciación de las lecciones anteriores, obtenemos la siguiente reformulación del teorema fundamental del cálculo, [Fol99, p. 106]:

**Teorema 5.4.1 (Teorema fundamental del cálculo).** *Sea $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Son equivalentes:*

*(i)* *$F$ es absolutamente continua en $[a,b]$.*

*(ii)* $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt$, *para alguna función* $f \in L^1\big([a,b]\big)$.

*(iii)* *$F$ es derivable en casi todo punto de $[a,b]$, $F' \in L^1\big([a,b]\big)$ y $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,dt$.*

Para finalizar, dada una medida regular en $\mathbb{R}^n$, descompuesta como suma de una medida absolutamente continua y otra singular respecto a la medida de Lebesgue, $\mu = \mu_a + \mu_s$, volvemos a descomponer la parte singular $\mu_s$ como suma de una medida discreta (atómica) $\mu_{sa}$ y otra continua (sin átomos) $\mu_{sc}$. Trasladando esta descomposición a las funciones monótonas, éstas pueden describirse como suma de una función monótona absolutamente continua, una función monótona continua con derivada nula en casi todo punto, y una función de salto. □

**Bibliografía utilizada en el capítulo:**
[Ash72], [Coh80], [Fol99], [dG80], [dGR79], [Rud88], [vRS82], [WZ77].

Capítulo 6

# Espacios de funciones

**TEMARIO**



En este último capítulo, utilizamos herramientas de la teoría de la medida y la integral para estudiar algunos espacios de funciones básicos en el análisis moderno: los espacios de funciones continuas en espacios localmente compactos, y los espacios $L^p$, cuyas normas se definen en términos de integrales y que generalizan los espacios de funciones integrables. Prestaremos una atención especial a los espacios de Hilbert $L^2$.

## Espacios de funciones continuas. Medidas de Radon

El teorema de Riesz (1909) de representación de operadores positivos sobre $C\big([0,1]\big)$ como integrales de Riemann-Stieltjes asociadas a funciones monótonas, estableció el punto de partida para la construcción de la teoría de la integración desde un punto de vista funcional dada por Daniell en 1919. Nuestro objetivo consiste en estudiar este teorema en el contexto de los espacios localmente compactos y las medidas de Radon.

**Lección 6.1 Espacios de funciones continuas.**

- Medidas de Radon en espacios localmente compactos.
- Teorema de representación de Riesz (funcionales positivos).
- El dual de $C_0(X)$.
- Convergencia *vaga* de medidas.
- Producto de medidas Radon.

*Descripción.* En la lección 2.5 hemos estudiado la noción de medida de Borel regular en un espacio topológico, y hemos comprobado cómo todas las medidas de Borel definidas en espacios localmente compactos con abiertos $\sigma$-compactos, que son finitas en los compactos, son medidas regulares. En esta lección vamos a denominar medidas de Radon a las medidas de Borel regulares definidas en los borelianos de espacios localmente compactos Hausdorff $X$.

Dada una medida de Radon $\mu$, el operador integral $T(f) = \int_X f\,d\mu$ es un operador positivo definido en el espacio $\mathscr{K}(X)$ de las funciones reales continuas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con soporte compacto. El teorema de representación de Riesz permite representar todos los funcionales lineales positivos definidos en $\mathscr{K}(X)$ como operadores integrales asociados a medidas positivas (véanse [Coh80, sec. 7.2], [Rud88, sec. 2.14] o [Fol99, sec. 7.1]):

**Teorema 6.1.1.** *Si $T : \mathscr{K}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal positivo, entonces existe una única medida de Borel regular $\mu$ en $X$ que representa a $T$*, i.e.,

$$T(f) = \int f\,d\mu \quad \textit{para toda} \;\; f \in \mathscr{K}(X).$$

*Además, $\mu$ está caracterizada, para $K$ compacto y $V$ abierto, por las ecuaciones:*

$$\mu(K) = \inf\big\{T(f) : \chi_K \le f\big\},$$
$$\mu(V) = \sup\big\{T(f) : f \le \chi_V\big\}.$$

Utilizando la estructura de retículo en los espacios de funciones reales representamos el dual del espacio de Banach de las funciones continuas que se anulan en el infinito, $C_0(X,\mathbb{R})$ (respectivamente, $C_0(X,\mathbb{C})$), con la norma del supremo, como el espacio $\mathscr{M}(X)$ de las medidas de Radon signadas (respectivamente, complejas) de variación acotada en $X$ con la norma de la variación, mediante la isometría $I : \mathscr{M}(X) \longrightarrow C_0(X,\mathbb{R})^*$ que está definida por $I_\nu(f) := \int f\,d\nu$, para cada medida de Borel regular $\nu$. Con esta identificación caracterizamos las sucesiones de medidas de Borel en $\mathbb{R}$ que convergen en la topología débil$^*$ (convergencia *vaga*) en términos de convergencia puntual de sus funciones de distribución, [Fol99, p. 223].

**Proposición 6.1.2.** *Sean $\mu_n,\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ medidas de Borel regulares, y sean $F_n(x) = \mu_n\big((-\infty,x]\big)$ y $F(x) = \mu\big((-\infty,x]\big)$, respectivamente, sus funciones de distribución. Si $\sup\|\nu_n\| < \infty$ y además $F_n(x) \to F(x)$ en cada punto $x$ en el que $F$ es continua, entonces $\nu_n$ converge hacia $\nu$ en la topología débil$^*$. Si las $\nu_n$ son medidas positivas, el recíproco también es cierto.*

Completamos la lección indicando la construcción de la medida producto de una familia (finita o no) de medidas de probabilidad de Radon definidas en espacios compactos, [Fol99, sec. 7.4]. $\square$

## Espacios $L^p$

Los espacios $L^p(\mu)$ fueron introducidos por F. Riesz, en 1910, como una generalización de los espacios de Hilbert y del espacio $L^1(\mu)$. Estos espacios proporcionan ejemplos interesantes en el análisis funcional, y juegan un papel fundamental en otras ramas del análisis.

En la primera lección damos su descripción y analizamos sus propiedades más básicas. La segunda lección la dedicamos a estudiar algunas operaciones definidas mediante integrales, utilizando las herramientas que proporciona la integral de Lebesgue.

**Lección 6.2 Espacios $L^p$.**

- Desigualdades básicas.
- Espacios $L^p(\mu)$ $(0 < p < \infty)$.
- $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\ell^p(\mathbb{N})$.
- Funciones de distribución y espacios débil-$L^p$.
- Dual de $L^p$.

*Descripción.* Sean $(\Omega,\Sigma,\mu)$ un espacio de medida y $0 < p < \infty$. Se definen

$$\mathscr{L}^p(\mu) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es } \mu\text{-medible y } \int |f|^p \, d\mu < \infty \right\},$$

y $L^p(\mu)$ como el espacio cociente que resulta al identificar las funciones de $\mathscr{L}^p(\mu)$ que coinciden en casi todo punto. Para cada $f \in L^p(\mu)$, se define

$$\|f\|_p := \left( \int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Las desigualdades de Young, Hölder y Minkowski permiten concluir que $\|\cdot\|_p$ define una norma en $L^p(\mu)$ si $1 \leq p < \infty$. Para $0 < p < 1$, consideramos en $L^p$ la distancia $d_p(f,g) := \int |f-g|^p \, d\mu$.

Utilizando las mismas ideas que las empleadas en la prueba de la completitud de $L^1$ probamos el siguiente teorema:

**Teorema 6.2.1 (Riesz-Fisher).** *Sea $(\Omega,\Sigma,\mu)$ un espacio de medida. Si $1 \leq p < \infty$, el espacio $L^p(\mu)$ con la norma $\|\cdot\|_p$ es completo,* i.e.*, es un espacio de Banach. Además, si $0 < p < 1$, el espacio $L^p(\mu)$ con la distancia $d_p$ es un espacio métrico completo.*

Al igual que hicimos en el caso de $L^1$, comprobamos la densidad de las funciones simples con soporte de medida finita en cualquier $L^p$, o cómo estos espacios son separables cuando la $\sigma$-álgebra es la completada de una que esté generada por una familia numerable. Analizamos el caso particular $p = 2$, donde la norma $\|\cdot\|_2$ proviene de un producto escalar que da a $L^2$ estructura de espacio de Hilbert, permitiéndonos hablar de ortogonalidad, bases y proyecciones. Para completar el esquema de los espacios $L^p$, introducimos el espacio $L^\infty$ de las funciones esencialmente acotadas.

Prestamos especial atención a los espacios de sucesiones $\ell^p(\mathbb{N})$, y a los espacios correspondientes a las medidas de probabilidad y a las medidas de Radon (en particular, a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$).

La desigualdad de Tchebychev

$$F(t) = \mu\Big(\{x : |f(x)| > t\}\Big) \leq \frac{\|f\|_p^p}{t^p}$$

asegura que, para funciones $f \in L^p$ $(0 < p < \infty)$, las distribuciones $F(t) < \infty$, para cada $t > 0$. La representación de las integrales como integrales de Riemann-Stieltjes proporciona la fórmula siguiente, que permite evaluar normas, [Fol99, sec. 6.4]:

$$\int |f|^p \, d\mu = -\int_0^\infty t^p \, dF(t) = p\int_0^\infty t^{p-1} F(t)\, dt.$$

Por otra parte, consideramos los espacios débiles-$L^p$ definidos por

$$\text{débil-}L^p(\mu) := \Big\{ f : [f]_p = \sup\{t^p F(t) : t > 0\}^{1/p} < \infty \Big\},$$

que contienen estrictamente a los $L^p(\mu)$, con $[f]_p \leq \|f\|_p$. Estos espacios tienen estructura de espacio vectorial y, aunque $[\cdot]_p$ no son normas (son quasi-normas), permiten definir topologías vectoriales en ellos, [Fol99, p. 198]. En la lección siguiente haremos uso de estos espacios en los teoremas de interpolación.

Utilizando la desigualdad de Hölder y el teorema de Radon-Nikodým, podemos identificar los duales de los espacios $L^p$ $(1 \leq p < \infty)$ con los espacios $L^q$ (para $1/p + 1/q = 1$), asociando, a cada $g \in L^q$, el funcional integral $T_g(f) = \int fg\, d\mu$ (véanse [Coh80, sec. 4.5], [Fol99, sec. 6.2]). Gracias a esta identificación, obtenemos la reflexividad de los espacios $L^p$, y podemos analizar la convergencia de sucesiones en la topología débil. Finalmente, utilizando la dualidad, establecemos la desigualdad integral de Minkowski. En la lección 4.10 de la asignatura *Análisis Funcional* se calculan los duales de los espacios $L^p$ sin utilizar el teorema de Radon-Nikodým. □

**Lección 6.3 Operadores en espacios $L^p$.**

- Algunos operadores definidos por integrales.
- Interpolación de espacios $L^p$. Teoremas de interpolación de Riesz-Thorin y Marcinkiewicz.
- Convolución de funciones en $\mathbb{R}^n$.
- Aproximaciones de la identidad.

*Descripción.* En esta última lección vamos a utilizar las técnicas de la integral para construir y manipular operadores integrales en espacios $L^p$, probando algunos resultados preliminares de otras ramas del análisis. Comenzamos estudiando algunas desigualdades interesantes relativas a operadores integrales, como en [Fol99, sec. 6.3], resaltando en especial la siguiente, que contiene a la desigualdad de Young para la convolución de funciones como caso particular:

**Teorema 6.3.1.** *Sean $(X,\Sigma_1,\mu)$ e $(Y,\Sigma_2,\nu)$ dos espacios de medida $\sigma$-finitos, y $K(x,y)$ una función medible en $X\times Y$. Supongamos que existe una constante $C$ tal que*

$$\int_X \big|K(x,y)\big|\,d\mu(x)\le C,\ \text{p.c.t. } y\in Y, \quad y \quad \int_Y \big|K(x,y)\big|\,d\nu(y)\le C,\ \text{p.c.t. } x\in X.$$

*Entonces, para cada $f\in L^p(\nu)$, las integrales $T(f)(x)=\int K(x,y)f(y)\,d\nu(y)$, están definidas en casi todo $x\in X$, y la función $T(f)\in L^p(\mu)$, con $\big\|T(f)\big\|_p\le C\|f\|_p$.*

Si $1\le p<q<r\le\infty$, se tienen las inclusiones $(L^p\cap L^r)\subset L^q\subset(L^p+L^r)$. Además, si $T$ es un operador lineal definido en $L^p+L^r$, que está acotado en $L^p$ y en $L^r$, es natural preguntarse si $T$ también está acotado en $L^q$. La respuesta es afirmativa. Nosotros vamos a estudiar dos generalizaciones de esta afirmación dadas por los teoremas de interpolación de Marcinkiewicz y de Riesz-Thorin, los cuales son el punto de partida de los métodos de interpolación real y complejo, respectivamente. Como aplicación, obtenemos pruebas sencillas de la desigualdad maximal de Hardy-Littlewood y de la versión más general de la desigualdad de Young, [Fol99, sec. 6.5].

Volvemos a visitar el producto de convolución de funciones medibles en $\mathbb{R}^n$ (lección 4.3), ahora con factores en espacios $L^p$, y analizamos las buenas propiedades de regularidad respecto a la continuidad y la diferenciabilidad. Por último, estudiamos aproximaciones de la identidad, *i.e.*, familias de funciones $K_\varepsilon$, $\varepsilon>0$, que permiten recuperar cualquier función $f$ como el límite de la familia $f*K_\varepsilon$ cuando $\varepsilon\to 0$. Construimos aproximaciones de la identidad $K_\varepsilon(x)=K(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$, con funciones $K\in L^1(\mathbb{R}^n)$ tales que $\int K\,d\lambda_n=1$, para las cuales se verifica el siguiente teorema, véanse [WZ77, sec. 9.2], [Fol99, sec. 8.2]:

**Teorema 6.3.2.** *Supongamos que $K\in L^1(\mathbb{R}^n)$, con $\int K\,d\lambda_n=1$.*

*(i)* *Si $1\le p<\infty$ y $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces* $\lim_{\varepsilon\to 0}\|f*K_\varepsilon-f\|_p=0$.
*(ii)* *Si $f$ está acotada y es uniformemente continua, entonces* $\lim_{\varepsilon\to 0}\|f*K_\varepsilon-f\|_\infty=0$.
*(iii)* *Si $f\in L^\infty$ y $f$ es continua en un abierto $A$, entonces* $\lim_{\varepsilon\to 0}\big|f*K_\varepsilon(x)-f(x)\big|=0$ *uniformemente sobre los subconjuntos compactos de $A$.*

En particular, si $K$ es, además, de clase infinito con soporte compacto, podemos concluir que el espacio de las funciones de clase infinito con soporte compacto es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, para cualquier $1\le p<\infty$. Cuando la función $K$ se anula en el infinito con cierta rapidez, se obtiene también convergencia en casi todo punto. □

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Coh80], [Fol99], [dGR79], [Rud88], [UD00], [WZ77].

# Parte III

# Introducción al Análisis Complejo

# Introducción al Análisis Complejo

| | |
|---|---|
| Código: | **1A4** |
| Nombre: | **Introducción al análisis complejo** |
| Descripción BOE: | **Funciones analíticas de una variable compleja** |
| Tipo: | **Obligatoria (Primer ciclo)** |
| Créditos: | **7.5 (4.5T + 3P)** |
| Duración: | **Cuatrimestral** |
| Contenidos: | **4 capítulos** |

La asignatura *Introducción al Análisis Complejo* está diseñada para proporcionar a los alumnos un primer contacto con la derivación e integración complejas que, junto con las técnicas de series de potencias, proveen de unas herramientas potentísimas para el tratamiento de muchos problemas físicos y matemáticos. Éste fue el origen del desarrollo, y la razón por la cual, la variable compleja alcanzó un gran éxito rápidamente a lo largo del siglo XIX, desde Cauchy hasta Weierstrass, pasando por Riemann. Sus métodos son ampliamente utilizados en otras ramas de las matemáticas. Incluso hoy en día, cuando se han abierto innumerables líneas de investigación en matemáticas, tanto abstractas como aplicadas, la teoría de funciones analíticas permanece tan impresionante como siempre, y es todavía un modelo a seguir. La potencia de los resultados de la teoría de funciones analíticas se ve ensalzada por la belleza de sus demostraciones y por la precisión con la que encajan todas y cada una de sus partes esenciales. Universidad a universidad, generación tras generación, plan de estudios tras plan de estudios, el *Análisis Complejo* siempre está presente.

El núcleo del curso que presentamos es la teoría de Cauchy de integración compleja y sus aplicaciones. Hemos apostado, sin duda, por un tratamiento sistemático de las series de potencias como principal proveedor de suficientes funciones que el alumno pueda manipular. Aunque en una segunda asignatura de *Análisis Complejo* trataremos en profundidad las funciones de variable compleja como *transformaciones* del plano complejo en sí mismo, en esta primera asignatura también abordamos este último punto de vista. Inculcaremos al alumno la idea de tratar con entidades concretas del plano complejo, su geometría, las funciones, y experimentar y comprender cómo topología, análisis y geometría interactúan para producir resultados espectaculares.

## Objetivo de la asignatura

- Conocer y asimilar los fundamentos de la teoría de funciones de variable compleja: la teoría de Cauchy y sus consecuencias.
- Saber abstraer problemas concretos sobre cálculos de integrales reales y sumas de series, para ser resueltos con técnicas de variable compleja.
- Conocer y comprender las demostraciones de los resultados centrales de la teoría, y adquirir destreza en su aplicación.

## Contenido

Hemos estructurado la asignatura en los cuatro capítulos que siguen:



Aunque el alumno debe estar familiarizado con el cuerpo de los números complejos al haber cursado la asignatura *Análisis Matemático I*, empezamos el primer capítulo revisando la topología de $\mathbb{C}$ e introduciendo la *esfera de Riemann* como un modelo para la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{C}$. Nos ocupamos, en particular, de manejar expresiones analíticas con interpretación geométrica (rectas, circunferencias, semiplanos, discos) y tomamos contacto con las transformaciones de Möbius. El capítulo se completa con el estudio de familias sumables de números complejos, lo que se aplica para deducir los clásicos resultados de sumación por paquetes, sumas iteradas y productos de convolución de series absolutamente convergentes.

En el segundo capítulo estudiamos las funciones de variable compleja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Nuestro estudio sobre las funciones complejas lo hacemos desde tres puntos de vista: (a) mirando $f$ como una función de la variable $z \in \mathbb{C}$, para la que se puede definir, por ejemplo, el concepto de derivada, y que, eventualmente, estará definida con el concurso de series de potencias $\sum_n a_n(z-a)^n$; (b) mirando $f$ como una función de las variables cartesianas $x+iy$, que nos conduce, de forma ineludible, a las condiciones de Cauchy-Riemann y al concepto de función armónica; (c) mirando $f$ como la aplicación $z \to f(z)$, para tratar de entender cómo transforma determinados recintos (o curvas) de $\Omega$ en recintos (o curvas) del rango $\mathbb{C}$. Dedicamos una parte notable del capítulo a realizar cálculos con funciones concretas: exponencial, logaritmo, funciones trigonométricas e hiperbólicas y sus inversas, etc. Insistimos una y otra vez en cuestiones delicadas sobre la determinación de ramas para funciones multiformes, e inculcamos en los alumnos la necesidad de mirar las funciones desde todos los puntos de vista; estudiamos la relación entre derivada no nula y conservación de ángulos.

El resultado fundamental del tercer capítulo, en el que se basa toda la teoría de Cauchy, es el que asegura que si $f$ es una función holomorfa, entonces $\omega(z) = f(z)\,dz$ es una forma diferencial cerrada (teorema de Cauchy-Goursat). En este capítulo presentamos las herramientas de integración curvilínea para formas diferenciales complejas (¡$\omega(z) = f(z)\,dz$!), que permiten deducir elegantemente el teorema de Cauchy-Goursat; de él, la fórmula de Cauchy para un disco; de ésta, la igualdad entre holomorfía y analiticidad, y el teorema de Liouville; y finalmente, de todo lo anterior, la fórmula y el teorema de Cauchy en su versión homológica general. La pregunta es, ¿por qué utilizar el lenguaje de las formas diferenciales? La respuesta es, ¿por qué no?, si se deja claro que nuestra forma, por antonomasia, es $\omega(z) = f(z)\,dz$, y de paso, se saca ventaja del capítulo de integración curvilínea que el alumno conoce de la asignatura *Análisis Matemático II*.

En el capítulo cuarto estudiamos el comportamiento de funciones $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus M)$, donde $M \subset \Omega$ es un conjunto discreto en $\Omega$, *i.e.*, estudiamos funciones con singularidades. Clasificamos las singularidades aisladas de funciones holomorfas en tres tipos: evitables, polos y esenciales. Demostramos el teorema de los residuos y, como consecuencia, probamos el principio del argumento y el teorema de Rouché. Se dan numerosas aplicaciones de estos resultados: teóricas (teorema de la aplicación abierta y función inversa) y prácticas (cálculo de integrales y sumación de series por el método de los residuos).

## Objetivos concretos

*Recordar* los recursos de topología del plano complejo para estudiar las funciones definidas en el mismo.

*Conocer* las series de potencias y las propiedades de derivabilidad de las funciones definidas mediante ellas.

*Extender* el concepto de cero de un polinomio al caso de funciones analíticas, y estudiar el principio de identidad.

*Relacionar* derivabilidad compleja y diferenciabilidad real.

*Manipular* las funciones clásicas concretas, conocer sus propiedades, saber cómo transforman unos dominios en otros, y aprender estrategias para encontrar dominios donde sus inversas estén definidas de forma *univaluada*, aprendiendo a dar expresiones concretas para las mismas.

*Utilizar* las condiciones de Cauchy-Riemann para calcular, en casos concretos, funciones armónicas conjugadas de otra dada.

*Conocer* los resultados centrales de la teoría de Cauchy y entender cómo se concatenan las ideas necesarias para llegar a demostrar la igualdad entre holomorfía y analiticidad.

*Demostrar* el teorema fundamental del álgebra.

*Utilizar* el teorema de Morera para demostrar la holomorfía de ciertas funciones, por ejemplo, algunas integrales dependientes de un parámetro.

*Conocer* el concepto de índice de un camino cerrado y saber interpretarlo, mediante la existencia de argumentos continuos del camino, como el *número de vueltas*.

*Demostrar* las versiones homológicas de los teoremas de Cauchy.

*Utilizar* los teoremas de Cauchy en su versión homológica para demostrar la existencia de desarrollos de Laurent.

*Obtener* desarrollos de Laurent de funciones concretas y aprender cómo, mediante ellos, se pueden dar determinaciones continuas de ramas de logaritmos y raíces de funciones holomorfas.

*Establecer* el teorema de los residuos y comprender que es una extensión del teorema de Cauchy.

*Abstraer* problemas concretos sobre cálculo de integrales reales y sumas de series, para ser resueltos con técnicas de variable compleja, en particular, mediante el teorema de los residuos.

*Demostrar* e interpretar el principio del argumento.

*Utilizar* el principio del argumento para adquirir destrezas que permitan reconocer (obtener) abiertos maximales donde las funciones holomorfas tengan raíces y logaritmos holomorfos.

*Comprender* el comportamiento local de las funciones holomorfas.

## Prerrequisitos

La asignatura tratará de hacerse de la forma más autocontenida posible. Partimos de que el alumno ha cursado las asignaturas: *Topología* (Troncal, primer ciclo, 6 créditos), *Análisis Matemático I y II* (Troncales, primer ciclo, 18 y 15 créditos).

## Bibliografía seleccionada


- ☞ L. V. Ahlfors, *Complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1978, An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics. MR 80c:30001.
- ☞ J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, New York, 1978. MR 80c:30003.
- ☞ W. Rudin, *Análisis real y complejo*, tercera ed., McGraw-Hill, 1988.
- ☞ G. Vera, *Introducción al análisis complejo*, Publicaciones del Departamento Matemáticas. Universidad de Murcia. 169 págs., 2000.

Capítulo 1

# El plano complejo

**TEMARIO**



El cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ se supone conocido por los alumnos desde que han cursado la asignatura *Análisis Matemático I* de primer ciclo de la Licenciatura en Matemáticas. No obstante, siendo $\mathbb{C}$ el dominio y rango de las funciones que se estudian en esta asignatura, parece razonable empezar por repasar sus propiedades fundamentales, haciendo énfasis en aquéllas que lo diferencian de $\mathbb{R}$. Desde estas primeras lecciones, queremos hacer partícipe al alumno del asombro que produce el estudio, por primera vez, de las funciones de variable compleja:

> *«El análisis no debe su significante progreso del último siglo al uso de $\sqrt{-1}$, sino a la circunstancia, bastante natural, de que uno tiene infinita más libertad de movimiento matemático si permite que las cantidades que maneja varíen en un plano en lugar de en una recta»* L. Kronecker, 1894.

Entre otras cosas, prestamos atención a las aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales de $\mathbb{C}$ en sí mismo (preparando el terreno para deducir las condiciones de Cauchy-Riemann, véase la lección 2.1). Se revisa la topología de $\mathbb{C}$ y se introduce un modelo para la compactificación $\mathbb{C}_\infty$ de Alexandroff de $\mathbb{C}$: la *esfera de Riemann*. Nos ocupamos, en particular, de la manipulación de expresiones analíticas con interpretación geométrica (rectas, circunferencias, semiplanos, discos) y estudiamos las transformaciones homográficas de $\mathbb{C}_\infty$, esto es, las transformaciones de Möbius. El capítulo se completa con el estudio de convergencia de series, que preferimos hacer vía *familias sumables* de números complejos, lo cual, desde nuestro punto de vista, aclara y simplifica muchas cuestiones concernientes a sumación por paquetes, sumas iteradas y productos de convolución de series.

**Lección 1.1 El cuerpo de los números complejos.**

- Operaciones en el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. $\mathbb{C}$ como extensión cerrada de $\mathbb{R}$.
- Partes real e imaginaria de un número complejo. Conjugados. Valor absoluto.
- Forma polar de un número complejo. Raíces.
- Representación geométrica de sumas y productos.
- Rectas, semiplanos y circunferencias en el plano complejo.
- Aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales y $\mathbb{C}$-lineales de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

*Descripción.* [Con78, p. 1-7] y [Ahl78, p. 1-17]. Suponemos conocida la construcción del cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos a partir de los pares ordenados de números reales (esta construcción ha sido ya estudiada en la asignatura *Análisis Matemático I*: cuando un par ordenado de números reales $(a,b)$ se considera como un elemento del cuerpo $\mathbb{C}$, entonces se expresa en la forma $a+bi$, donde $i := (0,1)$.

Construido $\mathbb{C}$, se tiene que $i^2+1=0$, y es asombroso el hecho de que $\mathbb{C}$ resulte algebraicamente cerrado en virtud del teorema fundamental del álgebra, véase la lección 3.2, donde se prueba este resultado utilizando el teorema de Liouville. Como se sabe, el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ está caracterizado, salvo isomorfismos, por ser el menor cuerpo algebraicamente cerrado que contiene a $\mathbb{R}$ como subcuerpo. Observamos que no es posible definir en $\mathbb{C}$ una relación de orden que sea compatible con las operaciones de cuerpo, [Apo76, p. 23-24].

Recordamos y fijamos la notación para diversos conceptos asociados a los números complejos, $z = x+iy \in \mathbb{C}$: parte real, $\operatorname{Re} z := x$; parte imaginaria, $\operatorname{Im} z := y$; conjugado, $\overline{z} := x - iy$; valor absoluto, $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$, que coincide con la norma euclídea del correspondiente vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Revisamos todas las propiedades del valor absoluto como una norma en $\mathbb{C}$, poniendo de manifiesto cómo puede ser demostrada fácilmente la desigualdad triangular utilizando propiedades algebraicas elementales de $\mathbb{C}$.

Aunque la presentación rigurosa de argumentos y logaritmos de números complejos no será tratada hasta la lección 2.4, cuando ya hayamos estudiado la exponencial compleja, sacamos ventaja aquí de la familiaridad del alumno con el uso de coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$ para representar cada número complejo $z$ en su forma polar, $z = |z|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ uno de sus *argumentos* (concepto sólo definido para $z \neq 0$). Utilizando las fórmulas de adición de las funciones sen y cos, se interpreta fácilmente que el producto de dos números complejos es otro número complejo que tiene por módulo el producto de los módulos de los factores, siendo uno de sus argumentos la suma de dos argumentos de sus factores.

Es fundamental transmitir la interpretación geométrica de la suma (diagonal en un paralelogramo) y del producto (semejanza de triángulos) de complejos. Suele ser muy cómoda la utilización de los números complejos para tratar algunas cuestiones de la geometría del plano euclídeo, y es conveniente familiarizarse con las expresiones analíticas:

– rectas, $L = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \frac{(z-a)}{b} = 0\right\}$,
– semiplanos, $P = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \frac{(z-a)}{b} < 0\right\}$,
– circunferencias y rectas,

$$\left\{z \in \mathbb{C} : A\bar{z}z + Bz + C\bar{z} + D = 0\right\}, \tag{1.1}$$

donde $A$ y $D$ son reales, $B$ y $C$ complejos conjugados y $AD - BC < 0$.

Acabamos esta primera lección estableciendo la siguiente propiedad elemental que utilizaremos para dar una demostración transparente de las condiciones de Cauchy-Riemann en la lección 2.1.

**Proposición 1.1.1.** *Sea $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una aplicación $\mathbb{R}$-lineal con matriz asociada $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. $T$ es $\mathbb{C}$-lineal (*i.e.*, una homotecia) si, y sólo si, $a = d$ y $b = -c$.* □

**Lección 1.2 Topología del plano complejo.**

- La topología del plano complejo: $\mathbb{C}$ como espacio métrico completo.
- Sucesiones convergentes: caracterizaciones de la adherencia y de la continuidad.
- Conexión en $\mathbb{C}$. Caracterización de los abiertos conexos como los conexos por poligonales. Componentes conexas de un abierto. Teorema del *«paso por la aduana»*.
- Conjuntos compactos. Familias fundamentales de compactos en los abiertos de $\mathbb{C}$.
- Topologías de convergencia puntual y uniforme sobre compactos en $\mathbb{C}^\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto.
- La compactificación $\mathbb{C}_\infty$ de $\mathbb{C}$ con el punto del infinito: la esfera de Riemann. La proyección estereográfica.

*Descripción.* [Con78, p. 11-24]. El valor absoluto en $\mathbb{C}$ es una norma cuya topología asociada es la correspondiente a la distancia euclídea de $\mathbb{R}^2$: las nociones topológicas y métricas de $\mathbb{C}$ son, en consecuencia, bien conocidas para el alumno. No obstante, repasamos algunas de estas propiedades, que serán utilizadas una y otra vez a lo largo del curso: $(\mathbb{C}, d)$ es métrico completo; la adherencia de subconjuntos y la continuidad de funciones definidas en (subconjuntos de) $\mathbb{C}$ se caracterizan por sucesiones.

Muchos razonamientos con funciones (analíticas) definidas en abiertos se realizarán utilizando la hipótesis añadida de conexión sobre el dominio. Recordaremos las siguientes propiedades básicas sobre conexión en $\mathbb{C}$: (a) Un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ es conexo si, y sólo si, es conexo por caminos (de hecho, por líneas poligonales de lados paralelos a los ejes). (b) Todo abierto es la unión disjunta (a lo más numerable) de abiertos conexos (sus *componentes conexas*). También llamaremos la atención sobre el teorema *«de paso por la aduana»*: dados $A \subset \mathbb{C}$ y $C \subset \mathbb{C}$, $C$ conexo, si $C \cap \operatorname{int} A \neq \emptyset$ y $C \cap \operatorname{Ext} A \neq \emptyset$, entonces $C \cap \partial A \neq \emptyset$.

Con respecto a los conjuntos compactos, se recuerda la caracterización que enunciamos a continuación. Las siguientes propiedades de un conjunto $K \subset \mathbb{C}$ son equivalentes: (a) $K$ es compacto;

(b) cada sucesión en $K$ posee una subsucesión convergente hacia un punto de $K$ (*i.e.*, $K$ es sucesionalmente compacto); (c) cada conjunto infinito $M \subset K$ tiene un punto de acumulación en $K$ ($K$ es numerablemente compacto); (d) $K$ es cerrado y acotado. En particular, $\mathbb{C}$ es un espacio localmente compacto. Es relevante, para estudiar sucesiones de funciones uniformemente convergentes sobre compactos, establecer (o recordar, si el alumno lo conoce) el siguiente resultado:

**Proposición 1.2.1.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto*

$$K_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq n,\, d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq 1/n \right\}$$

*es compacto y está contenido en $\Omega$. Además, la sucesión $(K_n)_n$ cubre $\Omega$ y verifica $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular, para cada compacto $K \subset \Omega$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_m$.*

Se sigue de lo anterior que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y $M \subset \Omega$ es discreto en $\Omega$, entonces $M$ es numerable; si además $\Omega$ es conexo, $\Omega \setminus M$ también lo es.

Para $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, se recuerda cómo se definen las topologías de convergencia puntual $\tau_p$ y de convergencia uniforme sobre compactos $\tau_K$ en $\mathbb{C}^\Omega$. Se enfatiza que el límite en $\tau_K$ de una sucesión de funciones continuas es una función continua, lo que será utilizado para demostrar el teorema de Weierstrass, véase la lección 3.2.

Completamos la lección estudiando la compactificación con un punto del plano complejo, [Con78, p. 8-10] y [Ahl78, p. 1-17]. En el plano ampliado $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se definen las operaciones algebraicas que tienen sentido, y se introduce de forma natural la topología de la compactificación con un punto. Se da un modelo para representar $\mathbb{C}_\infty$ a través de la *esfera de Riemann*,

$$S^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\},$$

con la distancia euclídea inducida por la de $\mathbb{R}^3$. $\mathbb{C}_\infty$ y $(S^2, d_2)$ son homeomorfos a través de la *proyección estereográfica* $\Psi : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow S^2$ dada por

$$\Psi(x+iy) = \left( \frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right), \quad \Psi(\infty) = (0,0,1) =: N.$$

Como consecuencia de lo anterior, la topología de $\mathbb{C}_\infty$ es metrizable mediante la *distancia cordal* $d_\infty(z,w) = d_2\big(\Psi(z), \Psi(w)\big)$ que, explícitamente, se puede dar por las fórmulas:

$$\begin{aligned} d_\infty(z,w) &= \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} \quad && \text{si } z,w \in \mathbb{C}; \\ d_\infty(z,\infty) &= \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} && \text{si } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

A la vista de las fórmulas previas se comenta que, si bien $d_\infty|_{\mathbb{C}}$ es topológicamente equivalente a la distancia asociada al valor absoluto de $\mathbb{C}$, estas dos distancias no son uniformemente equivalentes (se observa que $d_\infty|_{\mathbb{C}}$ no es completa en $\mathbb{C}$).

Utilizando la proyección estereográfica se pueden interpretar algunas transformaciones del plano complejo: la transformación $z \to 1/z$, mirada en la esfera de Riemann, es un giro de amplitud $\pi$ alrededor del eje $Ox_1$; esta interpretación será de utilidad para trabajar con las nociones de derivabilidad asociadas al punto $\infty$ que aparecen en la lección 4.1, cuando se estudian las funciones meromorfas. □

**Lección 1.3 Transformaciones de Möbius.**

- Transformaciones de Möbius: dilataciones, traslaciones, giros y la inversión.
- Razón doble. Conservación de la razón doble.
- Simetría: Principio de Simetría para transformaciones de Möbius.
- Orientaciones: Principio de Orientación para transformaciones de Möbius.
- Imágenes de semiespacios y discos por transformaciones de Möbius.

*Descripción.* [Con78, p. 47-57] y [Sch79]. El conjunto de las transformaciones de Möbius, *Mob*, está formado por las aplicaciones $T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ definidas mediante funciones racionales de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{donde } a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc \neq 0,$$

utilizándose los convenios habituales: si $c \neq 0$, $T(\infty) = a/c$ y $T(-d/c) = \infty$, y cuando $c = 0$, $T(\infty) = \infty$. Cada transformación de Möbius es una biyección de $\mathbb{C}_\infty$ en $\mathbb{C}_\infty$, cuya inversa es también una transformación de Möbius. De hecho, *Mob* es un grupo con la composición, que está generado por *traslaciones* ($z \to z+a$, $a \in \mathbb{C}$), *giros* ($z \to \alpha z$, $|\alpha| = 1$), *dilataciones* ($z \to rz$, $r > 0$) y la inversión ($z \to 1/z$). Cada uno de los generadores de *Mob* transforma la ecuación general de una recta o circunferencia (1.1) en una ecuación similar. Por tanto, las transformaciones de Möbius llevan circunferencias y rectas a circunferencias y rectas (circunferencias en sentido amplio). Se comprueba fácilmente que, dadas dos ternas ordenadas de puntos distintos $(z_1,z_2,z_3)$ y $(w_1,w_2,w_3)$ de $\mathbb{C}_\infty$, existe una única $T \in Mob$ que transforma la primera terna en la segunda, $T(z_i) = w_i$, $i = 1,2,3$. De este modo, dadas dos circunferencias (en sentido amplio), siempre hay una transformación de Möbius que lleva una en la otra.

A partir de aquí definimos el concepto de *razón doble*: dada una cuaterna ordenada $z_0,z_1,z_2,z_3$ en $\mathbb{C}_\infty$, donde $z_1$, $z_2$, $z_3$ son distintos, se define la razón doble $(z_0,z_1,z_2,z_3)$ como la imagen de $z_0$ mediante la única transformación de Möbius $R$ que verifica $R(z_1) = 0$, $R(z_2) = 1$, $R(z_3) = \infty$. Establecemos que la razón doble es un invariante de las transformaciones de Möbius, pudiendo dar ahora otra prueba de que las transformaciones de Möbius llevan circunferencias a circunferencias (en sentido amplio). Introducimos la noción de punto simétrico respecto a una circunferencia (en sentido amplio) utilizando la razón doble: si $z_1$, $z_2$, $z_3$ son tres puntos distintos de $\mathbb{C}_\infty$ y $\Gamma$ es la circunferencia que determinan, entonces $z^*$ es el simétrico de $z$ respecto a $\Gamma$ si (y sólo si) $(z^*,z_1,z_2,z_3) = \overline{(z,z_1,z_2,z_3)}$. Esta noción es independiente de los tres puntos distintos elegidos en

$\Gamma$, y corresponde al concepto geométrico de simetría respecto a una circunferencia o recta. Demostramos el principio de simetría para transformaciones de Möbius: si $T$ es una transformación de Möbius que lleva la circunferencia $\Gamma_1$ a la circunferencia $\Gamma_2$, entonces $T$ transforma puntos simétricos respecto a $\Gamma_1$ en puntos simétricos respecto a $\Gamma_2$. El principio de simetría resulta especialmente útil en las aplicaciones a la hora de obtener transformaciones de Möbius con ciertas propiedades; por ejemplo, si se desea transformar dos circunferencias disjuntas $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ en dos circunferencias concéntricas, basta determinar dos puntos $\alpha, \beta$ que sean simétricos respecto a ambas y considerar

$$T(z) = \frac{z-\alpha}{z-\beta}, \quad z \in \mathbb{C}_\infty.$$

Completamos la lección con el principio de orientación, discutiendo el concepto de lado (izquierdo y derecho) de una orientación respecto a una circunferencia (en sentido amplio), y analizando cómo estos lados corresponden a semiespacios (para una recta), o al interior y exterior de discos (para una circunferencia). Se prueba que las transformaciones de Möbius conservan los lados respecto de orientaciones dadas y, por ende, transforman semiespacios, discos o exteriores de discos, en este mismo tipo de conjuntos. Utilizamos argumentos de conexión para dar una prueba alternativa de estos resultados. La lección se complementa con ejemplos concretos de transformaciones de Möbius que llevan determinados dominios a otros dados, como por ejemplo:

**Proposición 1.3.1.** *La forma general de las transformaciones de Möbius $T$ que dejan invariante:*

*(i) el disco $D(0,1)$, es*

$$T(z) = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \quad \textit{con } \alpha \in \mathbb{R} \textit{ y } |a| < 1;$$

*(ii) el semiplano $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, es*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \textit{con } a,b,c,d \in \mathbb{R} \textit{ y } ad-bc \neq 0.$$ □

**Lección 1.4 Familias sumables de números complejos: series.**

- Familias sumables de números complejos. Condición de Cauchy.
- Familias sumables de números reales positivos.
- Equivalencia entre sumabilidad y sumabilidad absoluta en $\mathbb{C}$.
- Conmutatividad y asociatividad para familias sumables.
- Series en $\mathbb{C}$: equivalencia entre convergencia absoluta, incondicional y sumabilidad.
- Series dobles: sumas iteradas. Producto de convolución de series.
- Series funcionales: $M$-test de Weierstrass para convergencia uniforme. Criterios tipo Abel.

*Descripción.* [Cho66, p. 216-243]. Aunque podríamos dar por supuesto que el alumno conoce las nociones de convergencia, convergencia absoluta e incondicional de series de números complejos, preferimos aproximarnos a estos temas de forma autocontenida, vía las familias sumables, que ofrecen un punto de vista profundo y directo sobre algunas cuestiones de convergencia que necesitaremos a lo largo del curso. Si $I$ es un conjunto no vacío, representaremos por $\mathscr{P}_0(I) := \{J : J \subset I,\ J \text{ es finito}\}$. El conjunto $\mathscr{P}_0(I)$ es dirigido mediante la relación de contenido conjuntista $\subset$, *i.e.*,

$$J_1 \geq J_2 \text{ en } \mathscr{P}_0(I) \text{ si, por definición, } J_2 \subset J_1.$$

**Definición 1.4.1.** *Se dice que la familia $(z_i)_{i\in I}$ de números complejos es sumable con suma $z$, si la red $(\sum_{i\in J} z_i)_{J\in\mathscr{P}_0(I)}$ tiene límite $z$ en $\mathbb{C}$, y en este caso, se escribe $z = \sum_{i\in I} z_i$;* i.e.*, para cada $\varepsilon > 0$, existe $J_0 \in \mathscr{P}_0(I)$ tal que, si $J \in \mathscr{P}_0(I)$ y $J \geq J_0$, entonces $\|\sum_{i\in J} z_i - z\| < \varepsilon$. Se dice que $(z_i)_{i\in I}$ es absolutamente sumable si la familia $(|z_i|)_{i\in I}$ es sumable.*

Probamos que $(z_i)_{i\in I}$ es sumable si, y sólo si, se satisface la condición de Cauchy: para cada $\varepsilon > 0$, existe $J_0 \in \mathscr{P}_0(I)$ tal que, si $J \in \mathscr{P}_0(I)$ y $J \cap J_0 = \emptyset$, entonces $\|\sum_{i\in J} z_i\| < \varepsilon$. Una vez que hemos establecido esto, se prueba fácilmente que toda familia absolutamente sumable es sumable, y que si $(z_i)_{i\in I}$ es sumable, entonces el conjunto $\{i \in I : \ z_i \neq 0\}$ es, a lo más, numerable. Para familias de números reales no negativos $(a_i)_{i\in I}$, la sumabilidad es equivalente a que $\sup\left\{\sum_{i\in J} a_i : J \in \mathscr{P}_0(I)\right\} < \infty$. De aquí se obtiene fácilmente la siguiente caracterización de las familias sumables:

**Proposición 1.4.2.** *Sea $(z_i)_{i\in I}$ una familia de números complejos. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

*(i)* $(z_i)_{i\in I}$ *es sumable.*
*(ii)* $\sup\left\{\left|\sum_{i\in J} z_i\right| : J \in \mathscr{P}_0(I)\right\} < \infty.$
*(iii)* $\sup\left\{\sum_{i\in J} |z_i| : J \in \mathscr{P}_0(I)\right\} < \infty.$
*(iv)* $(z_i)_{i\in I}$ *es absolutamente sumable.*

De la proposición anterior se sigue que toda subfamilia de una familia sumable es sumable, y que se pueden sumar por paquetes las familias sumables (asociatividad); claramente, la sumabilidad de una familia y la de cualquier permutación (imagen biyectiva) de ella son equivalentes (conmutatividad). El trabajo hecho hasta aquí se aplica de forma contundente al estudio de series.

**Proposición 1.4.3.** *Sea $(z_n)_n$ una sucesión de números complejos. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

*(i) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente.*
*(ii) La familia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es absolutamente sumable.*
*(iii) La familia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable.*
*(iv) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es incondicionalmente convergente.*

El poder sumar por paquetes (asociatividad) familias sumables proporciona una prueba diáfana de que el orden en el que se iteran las sumas para series dobles absolutamente convergentes no importa: si $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|z_{nk}|\right) < \infty$, entonces, para cada $n,k \in \mathbb{N}$, las series $\sum_{k=1}^{\infty} z_{nk}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} z_{nk}$ son absolutamente convergentes, formando sus sumas series absolutamente convergentes que satisfacen $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} z_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} z_{nk}$. Otro tanto ocurre con el producto de Cauchy (de convolución) de series: si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ son dos series absolutamente convergentes y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es su producto de Cauchy, dado por $c_n = z_1 w_n + z_2 w_{n-1} + \cdots + z_n w_1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es absolutamente convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\right)$.

En [Apo76, p. 244-250] se dan otras demostraciones de los resultados anteriores concernientes a series dobles y producto de convolución, y se prueba el teorema de Mertens, el cual asegura que el producto de convolución de dos series convergentes es convergente cuando una de las dos series es absolutamente convergente.

Completamos la lección con el criterio de Weierstrass para convergencia uniforme de una serie funcional, que será utilizado con profusión, por ejemplo, al estudiar series de potencias: sea $K$ un conjunto y $f_n \in \mathbb{C}^K$, $n \in \mathbb{N}$; si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $M_n \geq \sup_{z\in K}|f(z)|$, y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, entonces la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es uniformemente convergente sobre $K$. También repasamos los criterios de convergencia tipo Abel y Dirichlet que se tratan para series funcionales, [SZ70, p. 96-101]. $\square$

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Ahl78], [Apo76], [Cho66], [Con78], [SZ70].

Capítulo 2

# Funciones de variable compleja

**TEMARIO**



En este capítulo presentamos al alumno el protagonista principal del curso: *las funciones de variable compleja*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \text{con } \Omega \subset \mathbb{C}.$$

A lo largo del capítulo nos aproximaremos a nuestro protagonista de tres maneras distintas: (a) mirando $f$ como una función de la variable $z \in \mathbb{C}$, para la que se puede definir, por ejemplo, el concepto de derivada y que, eventualmente, estará definida con el concurso de series de potencias $\sum_n a_n(z-a)^n$; (b) mirando $f$ como una función de las variables cartesianas $x+iy$, que nos conducen, de forma ineludible, a las condiciones de Cauchy-Riemann y al concepto de función armónica; (c) mirando $f$ como la aplicación $z \to f(z)$, para tratar de entender cómo transforma determinados recintos (o curvas) de $\Omega$ en recintos (o curvas) del rango $\mathbb{C}$.

**Lección 2.1 Holomorfía.**

- Derivación compleja. Relación entre derivabilidad y continuidad. Funciones holomorfas.
- Cálculo de derivadas: estructura de álgebra de $\mathscr{H}(\Omega)$.
- Regla de la cadena y derivada de la función inversa.
- Relación entre derivabilidad y $\mathbb{R}$-diferenciabilidad: ecuaciones de Cauchy-Riemann. Funciones armónicas. Teorema de Looman-Menchoff.
- Introducción de las variables $z$ y $\bar{z}$.

*Descripción.* [Con78, p. 33-35] y [Ahl78, p. 22-28]. Introducimos el concepto de derivada en sentido complejo:

**Definición 2.1.1.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función y $a \in \Omega$. Se dice que $f$ es derivable (u holomorfa) en $a \in \Omega$ si existe el límite*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} =: f'(a).$$

*Al número complejo $f'(a)$ se le llama derivada de $f$ en $a$. La función $f$ se dice derivable en $\Omega$ si es derivable en cada punto de $a \in \Omega$; en tal caso, se dice que $f$ es holomorfa en $\Omega$. El conjunto de las funciones holomorfas en $\Omega$ se denota por $\mathscr{H}(\Omega)$.*

Mostramos que las funciones constantes son derivables con derivada cero; que la derivada de la función identidad $z$ es 1; que las propiedades de las derivadas de la suma, producto por un escalar, producto, y cociente de funciones derivables cuyo denominador no se anula en un entorno de un punto, conservan las mismas fórmulas e idénticos métodos de demostración que en variable real: en definitiva, probamos que $\mathscr{H}(\Omega)$ es un álgebra cuando se dota de las operaciones habituales de suma, producto por escalares y producto de funciones. Demostramos también que una función derivable en un abierto conexo con derivada nula es constante, [Con78, p. 37]. Prestamos atención a la siguiente *versión débil del teorema de la función inversa*, que nos será de utilidad, por ejemplo, para obtener la derivabilidad de las *ramas* continuas de funciones multiformes (logaritmos, $\operatorname{arc\,sen}$, $\arccos$, etc.), [Con78, p. 39-40].

**Proposición 2.1.2.** *Sean $\Omega$ y $G$ abiertos de $\mathbb{C}$. Supongamos que $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ son funciones continuas con $f(G) \subset \Omega$ y $g\big(f(w)\big) = w$, para cada $w \in G$. Si $g$ es derivable en $z \in \Omega$ y $g'(z) \neq 0$, entonces $f$ es derivable en cada $w \in G$ y se tiene que*

$$f'(w) = \frac{1}{g'\big(f(w)\big)}.$$

En particular, cuando $g$ es inyectiva y $G = g(\Omega)$, tenemos una versión muy débil del teorema de la función inversa: en la lección 4.3 demostraremos que, si $g$ es una función holomorfa e inyectiva, entonces $g(\Omega)$ es abierto, $g'(z) \neq 0$, para cada $z \in \Omega$, y $f = g^{-1}$ es necesariamente holomorfa (aunque no se suponga a priori que $f$ es continua).

Una función compleja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ puede mirarse como un par de funciones reales,

$$f(x+iy) = u(x+iy) + v(x+iy),$$

con $z = x + iy \in \Omega$, $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$. Cuando identificamos $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, tiene sentido estudiar la $\mathbb{R}$-diferenciabilidad de $f$ en relación a su derivabilidad en sentido complejo ($\mathbb{C}$-diferenciabilidad). La proposición 1.1.1 permite relacionar fácilmente los dos conceptos anteriores y obtener lo que se conoce con el nombre de *condiciones de Cauchy-Riemann*.

**Teorema 2.1.3.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $a \in \Omega$. Para una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*a)* *$f$ es derivable en $a$ (en sentido complejo).*

*b)* *$f$ es $\mathbb{R}$-diferenciable en $a$ y su diferencial en $a$ es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal.*

*c)* *$f$ es $\mathbb{R}$-diferenciable en $a$ y sus componentes, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

*Si $f$ es derivable en $a$, se tiene que $df(a)(h) = f'(a)h$, y*

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a).$$

Como consecuencia obtenemos que, si $f$ admite derivadas parciales en un entorno de un punto $a$, que son continuas en $a$ y satisfacen en ese punto las condiciones de Cauchy-Riemann, entonces $f$ es holomorfa en $a$, utilícese [Apo76, p. 432-434]. En particular, si $f$ es de clase $C^1$ en $\Omega$ y se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann en todos los puntos de $\Omega$, entonces $f$ es holomorfa en $\Omega$. A la vista de las condiciones de Cauchy-Riemann, si $f = u + iv \in \mathscr{H}(\Omega)$ y suponemos que $u$ es una función de clase $C^2$ (esta suposición no será necesaria cuando hayamos probado que las funciones holomorfas son indefinidamente derivables), entonces $u$ satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

en cada punto del abierto $\Omega$; en este momento introducimos la definición de función armónica. Indicaremos, sin demostración, que es posible mejorar los resultados anteriores, [GM78]:

**Teorema 2.1.4 (Looman-Menchoff).** *Sean $\Omega$ un abierto en $\mathbb{C}$ y $f = u + iv : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que existen las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$, y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $\Omega$. Entonces $f$ es holomorfa en $\Omega$.*

En el teorema de Looman-Menchoff es esencial que se satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un abierto (y no sólo en un punto); en efecto, la función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(z) := z^5/|z|^4$, si $z \neq 0$, y $f(0) = 0$, cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $(0,0)$, pero no es derivable compleja. Por otro lado, la aplicación conjugada $z \to \bar{z}$ es de clase $C^\infty$ considerada como aplicación de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo, y no es derivable compleja en ningún punto. Nos parece conveniente *introducir las variables $z$ y $\bar{z}$* en la línea de [Car68, p. 75-76]. Dada una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, $\mathbb{R}$-diferenciable en $a \in \Omega$, reescribiremos la igualdad

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\,dy,$$

como

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)\,dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\,d\bar{z},$$

donde $dz : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $d\bar{z} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ son, respectivamente, la aplicación identidad y la aplicación que envía $z$ a $\bar{z}$, y escribiremos, por definición,

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

La expresión de la diferencial $df(a)$ en términos de la nueva base $\{dz, d\bar{z}\}$ nos permite reformular las condiciones de Cauchy-Riemann: *$f$ es holomorfa en $a$ si, y sólo si, $f$ es $\mathbb{R}$-diferenciable y $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$.* □

**Lección 2.2 Series de potencias.**

- Repaso: sucesiones y series de funciones; convergencia puntual y uniforme. Criterios tipo Abel y Dirichlet para convergencia uniforme de series funcionales.
- Series de potencias. Radio de convergencia.
- Concepto de límite superior de una sucesión. La fórmula de Cauchy-Hadamard.
- Reordenación de una serie de potencias: derivación de series de potencias.
- Operaciones con series de potencias: suma, producto, sustitución e inversión.
- Funciones analíticas. Principio de prolongación analítica.

*Descripción.* [Car68, Capítulo 1], [Con78, p. 30-44] y [Rem91, Chapter 4]. Comenzamos con un repaso de las nociones de convergencia relativas a sucesiones y series de funciones, haciendo énfasis en las diferencias entre convergencia puntual y uniforme. Nos centramos en el caso de funciones definidas en un abierto de $\mathbb{C}$ con valores complejos, y hablamos de las peculiaridades de la convergencia uniforme sobre compactos, recordando, por ejemplo, que la suma de una serie de funciones continuas uniformemente convergente sobre compactos es una función continua. Ponemos de manifiesto que la convergencia puntual no conserva la continuidad y que la convergencia uniforme, en el caso real, no conserva la derivabilidad. Todas estas cuestiones son de interés inmediato para el estudio de series de potencias.

Introducimos/recordamos la noción de serie de potencias (este concepto ha sido estudiado para series reales en la asignatura *Análisis Matemático I*): para una serie de potencias compleja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n$ definimos su radio $\rho$ de convergencia como

$$\rho := \sup\left\{r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty\right\}.$$

Caracterizamos $\rho$ como el único número que satisface las siguientes condiciones: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ no converge si $|z-a| > \rho$, y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ converge absolutamente si $|z-a| < \rho$. El criterio M de Weierstrass nos permite razonar que la serie de potencias converge uniforme y absolutamente sobre compactos del disco de convergencia $D(a,\rho)$. En particular, la función definida en $D(a,\rho)$ es continua. Ejemplos sencillos muestran que el radio de convergencia puede tomar cualquier valor en $[0,\infty]$, y que el comportamiento en la frontera del disco de convergencia también puede ser arbitrario. Utilizando el concepto de límite superior de una sucesión, establecemos el criterio de Cauchy-Hadamard, el cual nos permite calcular el radio de convergencia a través de la expresión

$$\rho^{-1} = \operatorname{lím\,sup} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Como aplicación teórica de esta fórmula, probamos que las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ tienen los mismos radios de convergencia. A continuación, estudiamos las operaciones con series de potencias: suma, producto (utilizamos los resultados sobre series dobles recordados en la lección 1.4), sustitución e inversión (algebraica). Prestamos especial atención a la *reordenación* de una serie de potencias alrededor de un punto arbitrario de su disco de convergencia, demostrando el siguiente resultado:

**Teorema 2.2.1.** *Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ es la función definida en $D(a,\rho)$ mediante una serie de potencias con radio de convergencia $\rho > 0$, entonces, para cada $b \in D(a,\rho)$, existe una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$, con radio de convergencia $\rho_b \geq \rho - |b-a|$, tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n, \quad \text{si} \quad |z-b| < \rho - |b-a|.$$

*Los coeficientes $b_n$ se pueden obtener, a partir de los $a_n$, como las sumas de las series absolutamente convergentes*

$$b_n = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} a_m (b-a)^{m-n}.$$

Este hecho es clave para demostrar que una función $f$ definida por una serie de potencias en un disco $D(a,\rho)$ es indefinidamente derivable en sentido complejo, y que su derivada viene dada por una serie de potencias del mismo radio de convergencia; en particular, los coeficientes de una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ están determinados por $f$, y se tiene que $a_n = f^{(n)}(a)/n!$, para $n \in \mathbb{N}$.

Introducimos la noción de función analítica: *una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se dice que es analítica en $a \in \Omega$ si existe un disco $D(a,r) \subset \Omega$ tal que $f$ se puede representar en $D(a,r)$ mediante una serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad \text{si } z \in D(a,r).$$

*Cuando $f$ es analítica en cada $a \in \Omega$ se dice que $f$ es analítica en* $\Omega$. Los polinomios son funciones analíticas y, más en general, toda función definida por una serie de potencias es analítica en su disco de convergencia, como consecuencia inmediata del teorema de reordenación 2.2.1.

Las funciones analíticas son holomorfas (de hecho son indefinidamente derivables) y con posterioridad veremos que, gracias a la fórmula de Cauchy, el recíproco también es cierto: toda función holomorfa es analítica. Si $\mathscr{A}(\Omega)$ denota el conjunto de todas las funciones analíticas en $\Omega$, los resultados sobre series de potencias presentados anteriormente aseguran que $\mathscr{A}(\Omega)$ es un espacio vectorial estable frente a la multiplicación. Usando el principio de sustitución, se puede dar una prueba directa de que la composición de funciones analíticas sigue siendo analítica, y de que si $f$ es analítica en $\Omega$ y $\Omega_0 = \{z \in \Omega : f(z) \neq 0\}$, entonces $1/f$ es analítica en $\Omega_0$.

Finalizamos la parte básica de este tema demostrando que *si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo y $f \in \mathscr{A}(\Omega)$, entonces $f^{(n)}(a) = 0$, para todo $n \geq 0$, en algún punto $a \in \Omega$ si, y sólo si, $f$ es idénticamente nula en todo* $\Omega$. Como consecuencia de lo anterior, el conjunto de los ceros de $f$, $\mathscr{Z}(f)$, es un conjunto discreto en $\Omega$, y de ahí se obtiene el principio de identidad para funciones analíticas: *si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y conexo, $M \subset \Omega$ con puntos de acumulación en $\Omega$, y $f,g \in \mathscr{A}(\Omega)$ coinciden en $M$, entonces $f = g$.* □

**Lección 2.3 Funciones elementales I.**

- La función exponencial. Propiedades.
- Funciones trigonométricas e hiperbólicas. Propiedades.
- Determinación de $\cos(\mathbb{C})$.

*Descripción.* [Ahl78, p. 42-44] y [Rem91, p. 133-148]. Las series de potencias que definen las funciones reales $e^x$, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, siguen convergiendo cuando se sustituye la variable real $x$ por la variable compleja $z$: las series de potencias obtenidas, con radio de convergencia $\infty$, proporcionan sus contrapartidas complejas, que son las únicas funciones analíticas en todo el plano que extienden las correspondientes funciones reales:

$$\begin{aligned}
\exp(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\\
\cos z &= \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots,\\
\operatorname{sen} z &= \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots,\\
\operatorname{sh} z &= \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2},\\
\operatorname{ch} z &= \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Establecemos la ecuación fundamental

$$\exp(z+w)=\exp(z)\exp(w), \quad \text{para cada } z,w\in\mathbb{C}, \tag{2.2}$$

utilizando para ello el producto de convolución de series absolutamente convergentes, véase la lección 1.4, y la fórmula del binomio de Newton. De esto se siguen las igualdades

$$\exp(x+iy)=e^x(\cos y+i\,\mathrm{sen}\,y) \quad \text{y} \quad \big|\exp(z)\big|=e^x.$$

A partir de aquí se deduce que exp es una función periódica cuyos periodos son $2\pi mi$, con $m\in\mathbb{Z}$. Se establece también que $c:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{T}$ definida por $c(t):=\exp(it)=\cos t+i\,\mathrm{sen}\,t$ es un homomorfismo del grupo aditivo $(\mathbb{R},+)$ sobre el grupo multiplicativo $(\mathbb{T},\cdot)$, cuyo núcleo es $2\pi\mathbb{Z}$. Como consecuencia, por paso al cociente, del homomorfismo de grupos $c:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{T}$ se obtiene un isomorfismo de grupos (incluso con sus topologías) $\tilde{c}:\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})\longrightarrow\mathbb{T}$. Gracias a la igualdad $\exp(z)\exp(-z)=\exp(0)=1$ se sigue que $\exp(z)\neq 0$ y, de hecho, se establece que $\exp(\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Se prueba fácilmente que $\exp'(z)=\exp(z)$, para cada $z\in\mathbb{C}$, y a partir de aquí establecemos que cualquier función entera $f$ satisfaciendo la ecuación funcional (2.2) y con $f(0)=1$ es, necesariamente, de la forma $f(z)=\exp(cz)$, para alguna constante $c\in\mathbb{C}$; comentamos que las soluciones continuas de la ecuación funcional (2.2) son las funciones de la forma $f(x+iy)=\exp(ax+by)$, con $a,b\in\mathbb{C}$.

Vemos además cómo la ecuación funcional (2.2) proporciona todas las relaciones trigonométricas clásicas,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sen}^2 z+\cos^2 z=1, \qquad \mathrm{sen}\,z=\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-z\right),\\
&\cos(-z)=\cos z, \qquad \mathrm{sen}(-z)=-\,\mathrm{sen}\,z,\\
&\mathrm{sen}(z+w)=\mathrm{sen}\,z\cos w+\cos z\,\mathrm{sen}\,w,\\
&\cos(z+w)=\cos z\cos w-\mathrm{sen}\,z\,\mathrm{sen}\,w,
\end{aligned}$$

que también pueden ser deducidas a partir de las correspondientes fórmulas cuando $z$ y $w$ son reales, y aplicando el principio de identidad, véase la lección 2.2. Se establecen las relaciones habituales entre funciones trigonométricas e hiperbólicas:

$$\mathrm{ch}(iz)=\cos z, \quad \mathrm{sh}(iz)=i\,\mathrm{sen}\,z, \quad \cos(iz)=\mathrm{ch}\,z, \quad \mathrm{sen}(iz)=i\,\mathrm{sh}\,z.$$

De la igualdad

$$|\cos z|^2=\cos z\cos\overline{z}=\frac{1}{2}\big(\cos(z+\overline{z})+\cos(z-\overline{z})\big)=\frac{1}{2}\big(\cos(2x)+\mathrm{ch}(2y)\big),$$

para $z=x+iy$, deducimos que los ceros de $\cos z$ son reales, y coinciden, además, con los de la función real $\cos x$. Como consecuencia, se tiene que las funciones $\mathrm{sen}\,z$ y $\cos z$ son periódicas de periodo $2\pi$, siendo sus únicos periodos los del conjunto $\{2m\pi : m\in\mathbb{Z}\}$. A partir de la igualdad

$$\cos(x+iy)=\cos x\,\mathrm{ch}\,y-i\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sh}\,y, \quad x+iy\in\mathbb{C},$$

demostramos que $\cos(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$; insistimos al alumno en la gran diferencia existente entre la función cos de variable real (que es acotada) y la función cos de variable compleja (que no lo es); adelantamos que, como consecuencia del teorema de Liouville, toda función entera no constante no es acotada. Acabamos la lección comentando que, una vez introducida la función exponencial compleja mediante (2.1), se podrían definir

$$\operatorname{sen} x := \operatorname{Im}\big(\exp(ix)\big) \quad \text{y} \quad \cos x := \operatorname{Re}\big(\exp(ix)\big),$$

y deducir para ellas todas las propiedades de las que hemos hecho uso, sin necesidad de utilizar los recursos previos que el alumno conoce del Análisis de una variable. Si se opta por este proceso, para introducir las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se define $\pi = 2\,\text{mín}\{t \in \mathbb{R} : \cos t = 0\}$, y se demuestra que la aplicación

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}, \qquad c(t) := \exp(it),$$

es suprayectiva, con $\{t \in \mathbb{R} : c(t) = 1\} = \{2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$, véase [Rud88]. $\square$

**Lección 2.4 Funciones elementales II.**

- Argumentos y logaritmos de la identidad: ramas.
- Argumentos y logaritmos de funciones continuas. Condición necesaria y suficiente para la existencia de logaritmos de funciones holomorfas.
- Potencias de base y exponente complejos. $\alpha$-potencias. Raíces continuas de funciones holomorfas.
- Determinación de ramas de inversas de funciones trigonométricas e hiperbólicas.

*Descripción.* [Ahl78, p. 46-48], [Rem91, p. 154-166] y [SZ70, p. 54-56]. La sobreyectividad de $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}$, $c(t) = \exp(it)$, asegura que, para cada número complejo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, existe (un argumento) $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\exp(i\alpha) = z/|z|$. El conjunto de todos los argumentos de $z$ se designa por $\arg z$ , y el único elemento de este conjunto que pertenece al intervalo $(-\pi,\pi]$ lo llamamos *argumento principal*, denotándose por $\operatorname{Arg} z$ ($\arg z$ es una función multivaluada, y $\operatorname{Arg} z$ es una de sus ramas). Análogamente, como $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, para cualquier complejo $w \neq 0$ existe (un logaritmo) $z \in \mathbb{C}$ tal que $\exp(z) = w$. El conjunto de todos los logaritmos de $w$ se representa por $\log w$, y puede calcularse como $\log w = \big\{\log|w| + i\alpha : \alpha \in \arg w\big\}$. El *logaritmo principal* $\operatorname{Log} w$ de $w$ es el que se obtiene con el argumento principal. Demostramos que $\operatorname{Arg} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ no es una función continua, pero que sí lo es restringida a $\mathbb{T} \setminus \{-1\}$. Consecuentemente, Arg y Log son continuas en el abierto $\Omega_0 := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$. Utilizando ahora la proposición 2.1.2, se obtiene que Log es holomorfa en $\Omega_0$ con derivada analítica, y por tanto, Log es analítica en $\Omega_0$. De aquí se sigue fácilmente que, en cada disco $D\big(c,|c|\big)$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, hay una determinación holomorfa de un logaritmo de la identidad.

Definimos argumentos y logaritmos asociados a funciones: si $X$ es un espacio topológico, para una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (respectivamente, $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$) llamamos logaritmo continuo de $f$ (respectivamente, argumento continuo de $\varphi$) a toda función continua $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ (respectivamente, $\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$) tal que $g(x) \in \log f(x)$, para todo $x \in X$ (respectivamente, tal que $\alpha(x) \in \arg \varphi(x)$, para todo $x \in X$); razonamos además que si $X$ es conexo, dos logaritmos continuos de $f$ (respectivamente, dos argumentos continuos de $\varphi$) difieren en un múltiplo entero de $2\pi i$ (respectivamente, $2\pi$). Como consecuencia de todo lo anterior se obtiene que, *si $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es un logaritmo continuo de una función holomorfa $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $0 \notin f(\Omega)$, entonces $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $g'(z) = f'(z)/f(z)$*. Sacando ventaja de este estudio, demostramos la siguiente condición necesaria y suficiente para la existencia de logaritmos:

**Proposición 2.4.1.** *Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, una condición necesaria y suficiente para que $f$ posea un logaritmo continuo (equivalentemente, holomorfo) en $\Omega$ es que $0 \notin f(\Omega)$ y la función $f'/f$ tenga primitiva en $\Omega$. Si $\Omega$ es conexo y $g$ es una primitiva de $f'/f$ en $\Omega$, entonces $g - c$, para una constante adecuada $c \in \mathbb{C}$, es un logaritmo holomorfo de $f$ en $\Omega$.*

Como aplicación, si el abierto $\Omega$ contiene a la circunferencia $\{z : |z| = r\}$, entonces no se puede definir en $\Omega$ un logaritmo continuo de la identidad, y $1/z$ no tiene primitiva en $\Omega$; consecuentemente, el abierto $\Omega_0$ definido anteriormente es un abierto maximal en el que $z$ tiene logaritmo. Desde el punto de vista de los ejercicios, insistimos en la búsqueda de logaritmos de funciones concretas, obteniendo, a partir de desarrollos concretos de $f'/f$, sus primitivas, cuando éstas existan.

A continuación abordamos el estudio de ramas de potencias de base y exponente complejos: dado un número complejo $a \neq 0$, para cada $z \in \mathbb{C}$ se define $a^z := \{\exp(cz) : c \in \log a\}$. La función $z \to a^z$ es multivaluada. Si fijamos $c \in \log a$, se obtiene una función analítica $f_c(z) = \exp(zc)$ tal que $f_c(z) \in a^z$, es decir, una rama analítica de $a^z$; para el logaritmo principal $c = \operatorname{Log} a$ se obtiene la rama principal $a^z$. En particular, $\exp(z)$ es la rama principal de $e^z$; así, a partir de ahora, se utilizará en el resto del curso el convenio $e^z = \exp(z)$, salvo que se indique lo contrario. Más en general, si $X$ es un espacio topológico y $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ son funciones continuas, $0 \notin f(X)$, llamamos determinación continua de $f^g$ a toda función continua $h : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $h(x) \in f(x)^{g(x)}$, para $x \in X$. Como caso particular de la situación anterior, presentamos las $\alpha$-potencias, *i.e.*, ramas principales de $(1+z)^\alpha$ (muy útiles para los cálculos que involucran expresiones concretas de raíces), [Hil59, p. 147-150], y las raíces $n$-ésimas, para las cuales demostramos el siguiente resultado:

**Proposición 2.4.2.** *Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $0 \notin f(\Omega)$. Si $h$ es una raíz $m$-ésima continua de $f$ en $\Omega$ (*i.e.*, $h(z)^m = f(z)$, para cada $z \in \Omega$), entonces $h$ es holomorfa y*

$$h'(z) = \frac{f'(z)h(z)}{mf(z)}.$$

Se comenta que si $f$ tiene un logaritmo holomorfo en $\Omega$, entonces $f$ tiene raíces de todos los órdenes, y que el recíproco, que es cierto, será demostrado posteriormente, una vez estudiada la teoría de Cauchy en el capítulo siguiente.

Concluimos la lección mostrando cómo se pueden definir ramas analíticas para las inversas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas, [Hil59, p. 150-159] y [NP82, p. 86-91]. Así, a modo de ejemplo, vemos que en el abierto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \left\{z \in \mathbb{R} : |z| \geq 1\right\}$ la fórmula

$$\frac{1}{i}\operatorname{Log}\left(z + ie^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1-z^2)}\right)$$

es una rama analítica de $\arccos z$. □

**Lección 2.5 Las funciones holomorfas como aplicaciones.**

- Conservación de ángulos orientados.
- Diferenciabilidad y analiticidad frente a la conservación de ángulos orientados.
- Aplicaciones e isomorfismos conformes.
- Funciones concretas como aplicaciones: $z^n$, $e^z$, $(z+1/z)/2$, $\cos z$.

*Descripción.* [PL74, p. 85-88 y Chapter 4]. Esta lección es una pequeña introducción al estudio de las transformaciones conformes que se lleva a cabo con más detalle en la asignatura *Análisis Complejo*: creemos importante dar esta introducción aquí para familiarizar al alumno con la idea de cómo mirar las funciones holomorfas como aplicaciones del plano en sí mismas. Presentamos la noción de ángulo orientado para un par vectores no nulos $(w_1,w_2)$ como el número real $\operatorname{Arg}(w_2/w_1) \in (-\pi,\pi]$. A continuación, introducimos el concepto de función que conserva ángulos orientados, [Rud88, p. 315]: *si $\Omega$ es un abierto de $\mathbb{C}$ y $a \in \Omega$, decimos que una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ conserva ángulos orientados en $a \in \Omega$ si se satisfacen las siguientes condiciones:*

*(i) Para cada $u \in \mathbb{C}$, con $|u| = 1$, existe $\delta_u > 0$ tal que $D(a,\delta_u) \subset \Omega$ y*

$$f(a+tu) - f(a) \neq 0, \quad \textit{si} \;\; 0 < t < \delta_u.$$

*(ii) Para cada $u \in \mathbb{C}$, con $|u| = 1$, existe*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+tu) - f(a)}{u\left|f(a+tu) - f(a)\right|} = c$$

*y no depende de $u$.*

Interpretamos geométricamente esta definición para dar sentido a la utilización del término *conservación de ángulos orientados*: suponiendo que $f$ sea diferenciable en $a$, si $\varphi_1$ y $\varphi_2$ son dos caminos derivables con origen en $a$, el ángulo orientado determinado por sus vectores unitarios tangentes en $a$ es el mismo que el que determinan los vectores unitarios tangentes en $f(a)$ para los caminos $f \circ \varphi_1$ y $f \circ \varphi_2$. Demostramos que si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en $a \in \Omega$, con $df(a) \neq 0$, entonces $f$ conserva ángulos orientados en $a$ si, y sólo si, $f$ es derivable en $a$. En el caso de que $f \in \mathscr{A}(\Omega)$, $f$ conserva ángulos orientados en $a$ si, y sólo si, $f'(a) \neq 0$. Llamamos aplicaciones conformes a aquellas funciones holomorfas $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ para las que $f'(a) \neq 0$ en todo $a \in \Omega$. Un isomorfismo conforme del abierto $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ sobre el abierto $\Omega_2 \subset \mathbb{C}$ es una aplicación biyectiva $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ tal que $f$ y $f^{-1}$ son conformes. Cuando se demuestre la igualdad $\mathscr{H}(\Omega) = \mathscr{A}(\Omega)$, quedará claro que el término *conforme* se utiliza como sinónimo de *conservar ángulos orientados*.

Comentamos cómo demostraremos, en la lección 4.3, y con recursos exclusivos de variable compleja, el teorema de la función inversa: si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ es inyectiva, entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, $V = f(\Omega)$ es abierto, y la inversa $f^{-1} : V \longrightarrow \Omega$ es holomorfa. Cuando hayamos establecido este resultado, quedará claro que toda aplicación holomorfa e inyectiva establece un isomorfismo conforme del abierto donde está definida sobre su imagen.

Completamos la lección manipulando funciones concretas, y estudiando cómo transforman determinados recintos en otros, dónde son biyecciones conformes y se pueden definir ramas de las inversas, etc. Así por ejemplo, comentamos que las transformaciones de Möbius estudiadas en la lección 1.3 son conformes, mostrando que las transformaciones del tipo

$$z \to e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z},$$

con $\theta \in \mathbb{R}$ y $|\alpha| < 1$, son isomorfismos conformes del disco unidad sobre sí mismo; reparamos en la aplicación $z \to z^2$, y prestamos atención a la duplicación de ángulos en 0; consideramos la aplicación $z \to e^z$, determinando los dominios donde es un isomorfismo conforme y estudiando las imágenes de rectas verticales y horizontales; realizamos un estudio similar para la función de Jukowski $z \to (z+1/z)/2$, del que sacamos ventaja para estudiar la transformación $z \to \cos z$, [PL74, p. 57-61]. En esta parte de la asignatura resulta muy conveniente el uso del ordenador para ilustrar los estudios teóricos realizados. □

**Bibliografía utilizada en el capítulo:**

[Ahl78], [Apo76], [Con78], [Car68], [GM78], [Hil59], [NP82] [PL74], [Rem91], [Rud88], [SZ70], [Ver00].

Capítulo 3

# La teoría de Cauchy

**TEMARIO**



El resultado fundamental, en el que se basa toda la teoría de Cauchy, es el que asegura que si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, entonces $\omega(z) = f(z)\,dz$ es una forma diferencial cerrada (teorema de Cauchy-Goursat). En este capítulo presentamos las herramientas de integración curvilínea para formas diferenciales complejas (¡$\omega(z) = f(z)\,dz$!), las cuales permiten deducir elegantemente el teorema de Cauchy-Goursat; de él, la fórmula de Cauchy para un disco; de ésta, la igualdad entre holomorfía y analiticidad, y el teorema de Liouville; y finalmente, de todo lo anterior, la fórmula y el teorema de Cauchy en su versión homológica general.

## Lección 3.1 Integración compleja.

- Integral de Riemann de funciones complejas.
- Caminos y caminos de clase $C^1$ a trozos en $\mathbb{C}$.
- Formas diferenciales complejas como un par de formas diferenciales reales. Formas diferenciales complejas cerradas y exactas.
- Integración de formas sobre caminos. Propiedades. Caracterización de formas exactas.
- Equivalencia de formas cerradas y exactas en discos. Caracterización de las formas diferenciales cerradas a través de integrales sobre bordes de rectángulos.

*Descripción.* [Car68, p. 52-70]. En esta lección fundamentamos/revisamos los recursos de integración curvilínea que utilizaremos para desarrollar la teoría de Cauchy en lecciones posteriores. Es natural plantearse la disyuntiva de si se quiere introducir al alumno en la integral $\int_\gamma f$ de una función compleja, continua sobre la imagen del camino rectificable $\gamma$, utilizando la integral de

Riemann-Stieltjes, como hace el libro de Conway, [Con78, Chapter IV], o si queremos utilizar los recursos de integración curvilínea explicados en la asignatura *Análisis Matemático II* para darle sentido a las integrales de la forma $\int_\gamma f(z)\,dz$ a través de la integral de dos formas diferenciales reales sobre el camino $\gamma$. Nosotros optamos por la segunda posibilidad, y estudiamos/revisamos la integral $\int_\gamma \omega$ de formas diferenciales complejas $\omega$ sobre caminos de clase $C^1$ a trozos, insistiendo, una y otra vez, que la forma por excelencia que se tendrá siempre presente es $\omega(z) := f(z)\,dz$, para $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, y teniendo en cuenta que los alumnos conocen/deben conocer integración sobre caminos de formas diferenciales reales.

Empezamos por revisar las propiedades elementales de la integral (de Riemann) de una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, como la suma, si existe, de la integral de la parte real más $i$ multiplicado por la integral de la parte imaginaria; ponemos de manifiesto la utilidad de desigualdades del tipo $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b \left|f(t)\right| dt$, la validez del teorema fundamental del cálculo integral, la regla de Barrow, la regla de sustitución $\int_r^s f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(r)}^{\varphi(s)} f(t)\,dt$, para $\varphi$ de clase $C^1$, y los teoremas de convergencia de paso al límite bajo el signo integral para funciones complejas. A continuación, revisamos las cuestiones relativas a caminos que se utilizan en el resto del curso. Un camino en un abierto $\Omega$ es una función continua $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$; los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ son, respectivamente, el origen y el extremo de $\gamma$, y cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que $\gamma$ es cerrado. Se recuerdan los conceptos de camino opuesto, yuxtaposición y equivalencia de caminos, así como la noción de longitud de un camino, y que para un camino de clase $C^1$ a trozos, $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, se tiene la igualdad $\operatorname{Long}(\gamma) = \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt$. Seguidamente, introducimos el concepto de forma diferencial compleja (de grado 1): *una forma diferencial compleja (de grado 1) sobre el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, es una aplicación $\omega : \Omega \longrightarrow \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, donde $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ es el espacio vectorial complejo de las aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales de $\mathbb{C}$ en sí mismo*. Utilizando las bases $\{dx, dy\}$ y $\{dz, d\bar{z}\}$ de $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, véase la lección 2.1, las formas complejas se expresan como

$$\omega(z) = \omega(x+iy) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = R(z)\,dz + S(z)\,d\bar{z}, \quad z = x+iy. \tag{3.1}$$

Observamos que una forma diferencial compleja $\omega$ no es más que una pareja de formas diferenciales reales: $\omega(x,y) = \operatorname{Re}\big(\omega(x,y)\big) + i\operatorname{Im}\big(\omega(x,y)\big)$. Definimos/recordamos los conceptos de forma diferencial continua, de clase $C^1$, cerrada, exacta, etc. Vemos que la forma diferencial compleja $\omega$ es cerrada (respectivamente, exacta) en $\Omega$ si, y sólo si, $\operatorname{Re}\big(\omega(x,y)\big)$ e $\operatorname{Im}\big(\omega(x,y)\big)$ son cerradas (respectivamente, exactas) en $\Omega$. Aislamos un primer resultado (prácticamente una observación) que será importante en demostraciones posteriores, como por ejemplo, en el teorema de Morera:

**Proposición 3.1.1.** *Si $\omega(z) = f(z)\,dz$ es una forma diferencial exacta en $\Omega$, entonces existe una función holomorfa $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F' = f$.*

El estudio realizado en la lección 2.4 nos permite demostrar fácilmente que la forma diferencial $dz/z$ es cerrada en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pero no es exacta. A continuación, introducimos la integral curvilínea como una herramienta para encontrar primitivas locales o globales de formas diferenciales complejas, y por ende, a la vista de la proposición 3.1.1, como una herramienta para decidir cuándo funciones holomorfas tienen primitivas holomorfas locales o globales. Si $\omega$ es una forma continua en $\Omega$ dada por las expresiones de (3.1), se define su integral a lo largo del camino de clase $C^1$ a trozos $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 : [a,b] \longrightarrow \Omega$ como

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega = \int_a^b \omega\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt &= \int_a^b \Big[P\big(\gamma(t)\big)\gamma_1'(t) + Q\big(\gamma(t)\big)\gamma_2'(t)\Big]\,dt \\ &= \int_a^b \Big[R\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t) + S\big(\gamma(t)\big)\overline{\gamma'(t)}\Big]\,dt. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Cuando $f$ es una función continua en $\Omega$, la integral de la forma diferencial compleja $\omega(z) = f(z)\,dz$ se expresa $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt$. A partir de aquí, revisamos/recordamos las propiedades de la integral $\int_\gamma \omega$: aditividad, cambios de caminos equivalentes, cambios de orientación, paso al límite bajo el signo integral, o que $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \sup\big\{|f(z)| : z \in \gamma\big\}\mathrm{Long}(\gamma)$. A continuación, nos ocupamos de establecer la equivalencia entre el hecho de que una forma continua $\omega$ en un abierto $\Omega$ sea exacta, y que $\int_\gamma \omega = 0$, para cada camino $\gamma$ en $\Omega$ cerrado y de clase $C^1$ a trozos; combinando esta caracterización con la proposición 3.1.1 se demuestra que, si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $0 \notin f(\Omega)$, entonces $f$ tiene un logaritmo en $\Omega$ si, y sólo si, $\int_\gamma f'(z)/f(z)\,dz = 0$, para cada camino cerrado $\gamma$ de clase $C^1$ a trozos en $\Omega$. Un hecho crucial es observar que si el abierto es un disco, $\Omega = D(a,r)$, entonces $\omega$ es exacta si, y sólo si, $\int_{\partial R} \omega = 0$ para cada rectángulo $R \subset \Omega$ de lados paralelos a los ejes. Con esta información demostramos:

**Teorema 3.1.2.** *Si $\omega$ es una forma diferencial real o compleja definida y continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, son equivalentes:*

*(i)* *$\omega$ es cerrada.*
*(ii)* *$\int_{\partial R} \omega = 0$ para cada rectángulo $R \subset \Omega$.*
*(iii)* *$\omega$ posee primitiva en cada disco $D(a,r) \subset \Omega$.*

Se llama la atención al alumno sobre la equivalencia entre *(i)* y *(iii)*, lo que permite pasar de primitivas para $\omega$ sobre discos $D(a,r_a)$ con radio $r_a$, *a priori muy pequeños*, a primitivas para $\omega$ sobre cualquier disco $D(a,r)$, con tal de que $D(a,r) \subset \Omega$. □

**Lección 3.2 El teorema y la fórmula de Cauchy: desarrollos en serie.**

- El teorema de Cauchy-Goursat. El teorema de Cauchy-Goursat mejorado.
- Analiticidad de las integrales dependientes de un parámetro. Integrales sobre los círculos $C_r(t) = a + re^{it}$: la igualdad $1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{1}{w-z}\,dw$, para $|z-a| < r$.
- La fórmula integral de Cauchy. La igualdad $\mathscr{H}(\Omega) = \mathscr{A}(\Omega)$.

- Desigualdades de Cauchy. Teorema de Liouville. Teorema fundamental del álgebra.
- Teorema de Morera. Aplicación: teorema de Weierstrass.

*Descripción.* [Car68, p. 76-90] y [Rud88, p. 231-243]. Esta lección es la columna vertebral del curso, y la estructuración de los resultados que se presentan es esencial para volver a ser utilizados en las versiones generales de los teoremas de Cauchy que se desarrollan en la lección 3.4. Empezamos comentando al alumno cómo Cauchy fundamentó su teoría en el hecho de que si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $f'$ es continua, entonces $\omega(z) = f(z)\,dz$ es una forma diferencial cerrada. La contribución fundamental de Goursat fue eliminar la hipótesis de continuidad de la derivada. Demostramos, [Rem91, p. 192-193] y [Car68, p. 76-78]:

**Teorema 3.2.1 (Cauchy-Goursat).** *Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ entonces $\omega(z) = f(z)\,dz$ es una forma diferencial cerrada en $\Omega$, y $f$ tiene primitiva en cada disco $D(a,r) \subset \Omega$.*

La demostración utiliza, de forma no trivial, el hecho de que la completitud de $\mathbb{C}$ se lee del siguiente modo: *toda sucesión decreciente de cerrados con diámetros tendiendo a cero tiene intersección no vacía*. La prueba mimetiza, en más de una parte, la demostración que se da del teorema 3.1.2. Probamos los tres ingredientes que siguen para llegar a demostrar la fórmula de Cauchy para un disco:

- **Teorema de Cauchy-Goursat mejorado:** *Si $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua en $a \in \Omega$ y holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$, entonces $\omega(z) = g(z)\,dz$ es una forma diferencial cerrada en $\Omega$.*
- **Analiticidad de integrales dependientes de un parámetro:** Sean $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino de clase $C^1$ a trozos y $K := \gamma\big([0,1]\big)$. Si $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces la función

  $$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw,$$

  definida en $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ es analítica y verifica que $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$. Más concretamente, para cada disco $D(a,r) \subset \Omega$, se tiene que

  $$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad \text{si } |z-a| < r,$$

  donde

  $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw.$$

- **Integrales sobre círculos $C_r(t) = a + re^{it}$:** Para cada $|z-a| < r$ se tiene la igualdad

  $$1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{1}{w-z}\,dw. \tag{3.3}$$

Con los tres ingredientes anteriores se demuestra ya la fórmula de Cauchy para un disco. Llamamos la atención al estudiante sobre cómo la igualdad (3.3), establecida para la función constante 1, es clave para demostrar que la misma igualdad **es cierta** para toda función holomorfa:

**Teorema 3.2.2 (Fórmula integral de Cauchy).** *Si* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ *y* $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$*, se tiene que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw, \quad \text{para cada } z \in D(a,r),$$

*donde* $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$.

La cascada de consecuencias que se derivan de la fórmula de Cauchy es apabullante, tanto por la potencia de las mismas como por la elegancia y sencillez al obtenerlas:

- $\mathscr{H}(\Omega) = \mathscr{A}(\Omega)$: Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, entonces $f$ es desarrollable en serie de potencias en cada disco $D(a,R) \subset \Omega$,
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad \text{si } |z-a| < R, \tag{3.4}$$
y los coeficientes del desarrollo vienen dados por
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw,$$
donde $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, con $0 < r < R$; el radio de convergencia de la serie (3.4) es, al menos, $\operatorname{dist}(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$.
- **Desigualdades de Cauchy:** Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, entonces, para cada $n \geq 0$, se verifica que
$$\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| \leq \frac{M(r)}{r^n},$$
donde $M(r) = \sup\{|f(z)| : |z-a| \leq r\}$.
- **Teorema de Liouville:** Toda función entera y acotada es constante.
- **Teorema fundamental del álgebra:** Todo polinomio en $\mathbb{C}$ que no es constante tiene, al menos, una raíz (y por tanto, todas las raíces) en $\mathbb{C}$.
- **Teorema de Morera:** Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$ para cada rectángulo cerrado $R \subset \Omega$, entonces $f \in \mathscr{H}(\Omega)$.
- **Teorema de Weierstrass:** Si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones holomorfas en un abierto $\Omega$, que converge uniformemente sobre compactos hacia una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces $f$ es holomorfa en $\Omega$ y la sucesión de las derivadas $(f_n')_n$ converge uniformemente sobre compactos hacia la derivada $f'$. $\square$

**Lección 3.3 Índice de un ciclo.**

- Logaritmo continuo de un camino. Logaritmos de caminos de clase $C^1$ a trozos.
- Índice de un camino cerrado: fórmula integral para el cálculo de índices de caminos cerrados de clase $C^1$ a trozos.
- Propiedades del Índice. Índice y homotopía.
- Aplicaciones. El teorema de Brouwer en $\mathbb{R}^2$. Condición necesaria y suficiente para que una función holomorfa admita raíces $m$-ésimas holomorfas en un abierto.
- Cadenas y ciclos. Índice de un ciclo. Homología.

*Descripción.* [Con78, p. 80-83] y [Rud88, p. 230-231 y 246-247]. En esta breve lección aislamos y estudiamos conceptos que necesitaremos para probar la versión homológica de los teoremas de Cauchy en la última lección del capítulo. Empezamos por demostrar que todo camino continuo $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tiene un logaritmo continuo: para ello, empleamos un argumento estándar con supremos, así como el hecho de que, en cada disco de la forma $D(c,|c|)$, $c \in \mathbb{C}$, haya definido un logaritmo continuo de la identidad, véase la lección 2.4. En el caso particular de que el camino $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ sea de clase $C^1$ a trozos, demostramos que la fórmula

$$g(t) = \alpha + \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\,ds, \quad 0 \le t \le 1 \;\text{ y }\; \alpha \in \log\gamma(0), \tag{3.5}$$

proporciona un logaritmo continuo de $\gamma$. Utilizando que dos logaritmos de un número complejo difieren en un múltiplo entero de $2\pi i$, razonamos que si $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ es un camino continuo y cerrado, el cociente

$$\frac{1}{2\pi i}\big(g(1) - g(0)\big) =: \operatorname{Ind}(\gamma,0)$$

es un número entero que indica el número de vueltas que da el camino $t \to \gamma(t)$ alrededor del origen cuando el parámetro $t$ recorre, de forma creciente, el intervalo $[0,1]$. En general, si $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $a \notin \gamma\big([0,1]\big)$, definimos el índice de $\gamma$ en $a$ como el índice de $\gamma - a$ en 0. Si $\gamma$ es de clase $C^1$ a trozos, la fórmula (3.5) permite derivar la igualdad

$$\operatorname{Ind}(\gamma,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

A continuación, establecemos las siguientes afirmaciones que resultarán esenciales para deducir las propiedades del índice de caminos:

**Proposición 3.3.1.** *Si $\gamma_0,\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ son caminos cerrados continuos, se verifican:*

*a)* $\operatorname{Ind}(\gamma_0\gamma_1,0) = \operatorname{Ind}(\gamma_0,0) + \operatorname{Ind}(\gamma_1,0)$.

*b)* $\operatorname{Ind}(\gamma_1,0) = \operatorname{Ind}(\gamma_0,0)$ *si* $\big|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)\big| \le \big|\gamma_1(t)\big|$, *para todo* $t \in [a,b]$.

La proposición anterior es clave para demostrar las siguientes propiedades. Recordamos la noción de homotopía de caminos.

- Sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino cerrado continuo. La función $z \to \operatorname{Ind}(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([0,1]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de $V$, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
- Sea $\Lambda_0(\mathbb{C}) := \big\{\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} : \gamma \text{ continuo y } \gamma(0) = \gamma(1)\big\}$, dotado de la norma del supremo. La aplicación $\gamma \to \operatorname{Ind}(\gamma, 0)$, de $\Lambda_0(\mathbb{C})$ en $\mathbb{Z}$, es localmente constante.
- Si $\gamma_0$ y $\gamma_1$ son dos caminos cerrados, que no pasan por cero, $(\mathbb{C} \setminus \{0\})$-homotópicos, entonces $\operatorname{Ind}(\gamma_0, 0) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, 0)$.

Prestamos especial atención al índice de circunferencias y de rectángulos respecto a puntos interiores y exteriores. Utilizamos las propiedades anteriores del índice para demostrar el teorema de Brouwer en $\mathbb{R}^2$:

**Teorema 3.3.2 (Brouwer en $\mathbb{R}^2$).** *Si $\overline{D}$ es la bola unidad cerrada de $\mathbb{C}$, sea $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se verifican:*

*(i) Si $\gamma(t) = f(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, y $a \notin \gamma\big([0, 2\pi]\big)$ satisface que $\operatorname{Ind}(\gamma, a) \neq 0$, entonces existe $z \in D$ tal que $f(z) = a$.*

*(ii) Si $f\big(\overline{D}\big) \subset \overline{D}$, entonces $f$ tiene un punto fijo,* i.e.*, existe $z \in \overline{D}$ tal que $f(z) = z$.*

También utilizamos el concepto de índice y el estudio realizado sobre existencia de logaritmos para demostrar la siguiente caracterización:

**Proposición 3.3.3.** *Para $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, con $0 \notin f(\Omega)$, y $m \in \mathbb{N}$, son equivalentes:*

*i) Existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $g^m = f$.*

*ii) Para cada camino cerrado $\gamma$, de clase $C^1$ a trozos en $\Omega$, se cumple que*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \in m\mathbb{Z}.$$

Acabamos la lección introduciendo los conceptos de cadena y ciclo, integrales sobre cadenas y ciclos, e índice de un ciclo respecto a un punto. Analizamos las propiedades que surgen alrededor de estas nociones que, en los más de los casos, son meros formalismos con relación a los correspondientes conceptos ya conocidos sobre caminos. Introducimos la noción de ciclos $\Omega$-homólogos que nos deja en las puertas del teorema de Cauchy:

**Definición 3.3.4.** *Dos ciclos $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que son $\Omega$-homólogos si*

$$\operatorname{Ind}(\Gamma_1, z) = \operatorname{Ind}(\Gamma_2, z), \quad \textit{para cada } z \notin \Omega.$$

*Un ciclo $\Gamma$ en $\Omega$ se dice que es $\Omega$-homólogo a $0$ si $\operatorname{Ind}(\Gamma, z) = 0$, para cada $z \notin \Omega$.* □

**Lección 3.4 Versión homológica de los teoremas de Cauchy.**

- Versiones homológicas de la fórmula y del teorema de Cauchy.
- Versión homotópica del teorema de Cauchy.
- Teoría global: caracterización de los abiertos en los que el teorema de Cauchy se satisface. Abiertos simplemente conexos.
- Una aplicación de la fórmula de Cauchy en versión homológica: desarrollos de Laurent.

*Descripción.* [Rud88, p. 246-254]. En la lección anterior nos hemos preocupado de cuestiones *locales* relativas a las funciones holomorfas: fórmulas que sirven dentro de un disco, desarrollos en serie, etc. En esta lección nos ocupamos de aspectos *globales*, como los que siguen:

**A.-** ¿Qué condiciones debe cumplir un camino cerrado $\gamma$, de clase $C^1$ a trozos en un abierto $\Omega$, para que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, para toda $f \in \mathscr{H}(\Omega)$?

**B.-** Dados un abierto $\Omega$ en $\mathbb{C}$ y un camino cerrado $\gamma$, de clase $C^1$ a trozos en $\Omega$, satisfaciendo **A**, ¿cómo se modifica la fórmula integral de Cauchy si se integra sobre $\gamma$ en lugar de sobre una circunferencia?

**C.-** ¿Para qué clase de abiertos $\Omega$ se cumple $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, para toda $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y todo camino cerrado $\gamma$, de clase $C^1$ a trozos en $\Omega$?

Las versiones homológicas de los teoremas de Cauchy ayudan a dar respuesta a todas estas preguntas. Empezamos por establecer, con ayuda del teorema de Morera, un lema sobre la holomorfía de una integral dependiente de un parámetro: *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $g : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. Se supone que, para cada $w \in \Omega$, la función $z \to g(z,w)$ es holomorfa en $\Omega$. Si $\gamma$ es un camino de clase $C^1$ a trozos en $\Omega$, entonces, la función $F(z) = \int_\gamma g(z,w)\,dw$ es holomorfa en $\Omega$.* Este lema, junto con la analiticidad de las integrales dependientes de un parámetro comentada en la página 82, y el teorema de Liouville, nos permite dar respuesta a la cuestión **B**:

**Teorema 3.4.1 (Versión homológica de la fórmula integral de Cauchy).** *Sea $\Gamma$ un ciclo de clase $C^1$ a trozos en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $\Gamma$ es $\Omega$-homólogo a $0$, entonces, para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y cada $z \in \Omega \setminus \mathrm{Imagen}(\Gamma)$, se tiene que*

$$\mathrm{Ind}(\Gamma,z)\,f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw. \tag{3.6}$$

Equivalentemente, tenemos la respuesta a la cuestión **A**:

**Teorema 3.4.2 (Versión homológica del teorema de Cauchy).** *Si $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ son ciclos de clase $C^1$ a trozos, $\Omega$-homólogos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, se verifica que*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

*En particular, si $\Gamma$ es un ciclo $\Omega$-homólogo a $0$, se tiene que $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$.*

Con un poco de trabajo extra, damos respuesta a la cuestión **C**:

**Teorema 3.4.3.** *Las siguientes propiedades de un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ son equivalentes:*

*(i)* $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ *es conexo.*

*(ii)* *Cada ciclo de clase $C^1$ a trozos en $\Omega$ es $\Omega$-homólogo a* $0$.

*(iii)* *Para cada ciclo $\Gamma$ de clase $C^1$ a trozos en $\Omega$, cada $z \in \Omega \setminus \operatorname{Imagen}(\Gamma)$ y cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, se satisface la fórmula* (3.6).

*(iv)* *Para cada ciclo $\Gamma$ de clase $C^1$ a trozos en $\Omega$ y cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, se tiene que $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$.*

*(v)* *$\Omega$ es holomórficamente conexo*, i.e., *para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, existe $F \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $F' = f$.*

*(vi)* *Para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$, existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $e^g = f$.*

Recordamos la noción de abierto simplemente conexo: *un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice simplemente conexo, si cada camino cerrado en $\Omega$ es $\Omega$-homotópico a un camino constante.* Como caminos homotópicos tienen el mismo índice, véase la página 3, todo camino en $\Omega$ que sea $\Omega$-homotópico a un camino constante será $\Omega$-homólogo a cero. Consecuentemente, el teorema de Cauchy 3.4.1 puede enunciarse con homotopía en vez de homología para caminos cerrados de clase $C^1$ a trozos. Para un abierto $\Omega$, la condición de ser simplemente conexo implica todas las condiciones equivalentes del teorema 3.4.3; comentamos que, como consecuencia del teorema de representación conforme de Riemann, que será demostrado en la asignatura *Análisis Complejo*, las condiciones en 3.4.3 caracterizan, de hecho, a los abiertos simplemente conexos.

La lección termina con el estudio de los desarrollos de Laurent de funciones holomorfas definidas en coronas, [Ahl78, p. 184-186].

**Teorema 3.4.4.** *Si $\Omega = \{z : r < |z-a| < R\}$ y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, entonces $f$ admite un desarrollo de Laurent en $\Omega$*, i.e.,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad \text{si } r < |z-a| < R, \tag{3.7}$$

*cuyos coeficientes vienen dados por las integrales*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

*donde $C_\rho(t) = a + \rho e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, con $r < \rho < R$.*

Para establecer el resultado anterior, usamos la fórmula de Cauchy en su versión homológica, junto con el hecho, que probamos previamente, de que una función $f \in \mathscr{H}\big(\{z : r < |z-a| < R\}\big)$ admite un desarrollo de la forma (3.7) si, y sólo si, $f(z) = f_\infty(z) + f_0(z)$, para $r < |z-a| < R$, donde $f_0 \in \mathscr{H}\big(\{z : |z-a| < R\}\big)$ y $f_\infty \in \mathscr{H}\big(\{z : |z-a| > r\}\big)$, con $\lim_{z\to\infty} f_\infty(z) = 0$. $\square$

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Ahl78], [Car68], [Con78], [Rud88], [Rem91].

Capítulo 4

# Singularidades aisladas y teorema de los residuos

**TEMARIO**



En este capítulo estudiamos el comportamiento de funciones $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus M)$, donde $M \subset \Omega$ es un conjunto discreto en $\Omega$ (no se excluye la posibilidad $M = \emptyset$): en este caso, cada $a \in M$ se dice que es una *singularidad aislada* de $f$.

Clasificamos las singularidades aisladas de funciones holomorfas en tres tipos: evitables, polos y esenciales. Demostramos el teorema de los residuos y, como consecuencia, probamos el Principio del Argumento y el teorema de Rouché. Se dan numerosas aplicaciones de estos resultados: teóricas (teorema de la aplicación abierta y función inversa) y prácticas (cálculo de integrales y sumación de series por el método de los residuos).

**Lección 4.1 Teorema de los residuos.**

- Singularidades aisladas. Definición de residuo. Teorema de los residuos.
- Cálculo de algunos residuos. Una primera aplicación del teorema de los residuos: cálculo de integrales del tipo $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \operatorname{sen} x)\, dx$.
- Clasificación de las singularidades aisladas. Teorema de Casorati-Weierstrass. Clasificación de singularidades a través de desarrollos de Laurent.
- Singularidades en el infinito. Residuo en el infinito.
- Funciones meromorfas.

*Descripción.* [Con78, p. 103-112]. Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, $a \notin \Omega$ y $D^*(a,r) \subset \Omega$ para algún $r > 0$, se dice que $a$ es una singularidad aislada de $f$. Definimos el residuo de $f$ en $a$, denotado por $\operatorname{Res}(f,a)$, como el único $\alpha \in \mathbb{C}$ que hace que $f(z) - \dfrac{\alpha}{z-a}$ tenga primitiva en cada $D^*(a,\rho) \subset \Omega$. O lo que es lo mismo,

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} f(z)\,dz,$$

para cada $0<\rho<r$, donde $C_\rho(\theta)=a+\rho e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$. El residuo se puede calcular acudiendo al desarrollo de Laurent de la función $f$ alrededor de la singularidad: si

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \qquad 0<|z-a|<r,$$

entonces $\operatorname{Res}(f,a)=a_{-1}$. Como aplicación del teorema de Cauchy en su versión homológica, véase la lección 3.4, demostramos el teorema de los residuos.

**Teorema 4.1.1 (Teorema de los residuos).** *Sean $\Omega\subset\mathbb{C}$ abierto, $M\subset\Omega$ tal que $M'\cap\Omega=\emptyset$, y $f\in\mathscr{H}(\Omega\setminus M)$. Si $\Gamma$ es un ciclo en $\Omega\setminus M$ de clase $C^1$ a trozos y $\Omega$-homólogo a $0$, se tiene que*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz=\sum_{a\in M}\operatorname{Ind}(\Gamma,a)\operatorname{Res}(f,a),$$

*donde la suma es de soporte finito.*

Desde un punto de vista práctico, damos una primera ilustración de cómo calcular algunos tipos de integrales utilizando el teorema de los residuos, [Car68, p. 113]: *si $g(t)=R(\cos t,\operatorname{sen} t)$ es una función continua en $[0,2\pi]$, donde $R(z,w)$ es una función racional, entonces*

$$\int_0^{2\pi} g(t)\,dt=\sum_{|a|<1}\operatorname{Res}(f,a), \quad \textit{donde}\;\; f(z)=R\left(\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big),\frac{1}{2i}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)\right)\frac{1}{iz}. \tag{4.1}$$

Es por tanto de interés el cálculo efectivo de residuos, en particular, para las singularidades de fracciones racionales. Obsérvese que, si $f\in\mathscr{H}\big(D^*(a,r)\big)$ tiene un desarrollo de Laurent de la forma

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+\cdots, \quad \text{con}\;\; a_{-m}\neq 0, \tag{4.2}$$

entonces

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z).$$

Esta fórmula cubre el cálculo de los residuos para fracciones racionales, dado que cualquier cociente $f/g$, con $f,g\in\mathscr{H}(\mathbb{C})$, tiene, alrededor de los ceros del denominador, un desarrollo de Laurent de la forma (4.2).

A la vista de los resultados previos, es natural plantearse la clasificación de las singularidades de funciones holomorfas. Si $f\in\mathscr{H}(\Omega)$ y $a\notin\Omega$ es una singularidad aislada de $f$, decimos que $a$ es: (i) una singularidad evitable, si existe el límite $\lim_{z\to a} f(z)=b\in\mathbb{C}$; (ii) un polo, si existe el límite $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$; (iii) una singularidad esencial, cuando no existe el límite $\lim_{z\to a} f(z)$

en $\mathbb{C}_\infty$. A continuación, caracterizamos los distintos tipos de singularidades: (i) *a es singularidad evitable para f si, y sólo si, f está acotada en algún* $D^*(a,r) \subset \Omega$*, lo que ocurre si, y sólo si, f admite una extensión holomorfa al abierto* $\Omega_a = \Omega \cup \{a\}$*;* (ii) *a es polo de f si, y sólo si, existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que existe* $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *(en este caso, m es único, y se llama multiplicidad del polo a);* (iii) *a es singularidad esencial de f si, y sólo si,* $f\big(D^*(a,\varepsilon)\big)$ *es denso en* $\mathbb{C}$*, para cada* $D^*(a,\varepsilon) \subset \Omega$. La última caracterización recibe el nombre de teorema de Casorati-Weierstrass. Es un buen ejercicio para los alumnos obtener la siguiente mejora del teorema de Casorati-Weierstrass, que aparece planteado como tal en [Con78, Exercice 10, p. 111]: dados $c \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, para cada $\delta > 0$ existe un número $\alpha$, con $|c-\alpha| < \varepsilon$, tal que la ecuación $f(z) = \alpha$ tiene infinitas soluciones distintas en $D^*(a,\delta)$. Llegados aquí, comentamos el teorema grande de Picard: si una función holomorfa $f$ tiene en $a$ una singularidad esencial, entonces $f$ toma, en cada entorno de $a$, todos los valores complejos, con una posible excepción, y una cantidad infinita de veces. Los desarrollos de Laurent se utilizan para determinar el tipo de singularidad: *sean* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$*,* $a \notin \Omega$ *singularidad aislada de f y* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *el desarrollo de Laurent de f en* $D^*(a,r) \subset \Omega$*. Si* $M = \{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$*, entonces se verifican: (a) a es singularidad evitable si, y sólo si,* $\inf M \geq 0$*; (b) a es polo (de multiplicidad m) si, y sólo si,* $\inf M = -m < 0$*; (c) a es singularidad esencial si, y sólo si,* $\inf M = -\infty$*.*

A continuación, introducimos y comentamos las nociones previamente estudiadas para el punto del infinito. Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subset \Omega$, se dice que $\infty$ es una singularidad aislada de $f$, [Mar65, p. 52-54]. Además, se dice que $\infty$ es singularidad evitable, polo, o singularidad esencial de $f$ si 0 es, respectivamente, singularidad evitable, polo, o singularidad esencial de $f(1/z)$. Si $\infty$ es polo de $f$, se define su multiplicidad como la del polo que tiene $f(1/z)$ en 0. Caracterizamos, en función de los desarrollos de Laurent, los tres tipos de singularidades en el infinito, razonando, por ejemplo, que una función entera tiene un polo en el infinito si, y sólo si, $f$ es un polinomio. La definición de residuo en el $\infty$ contrasta con las definiciones previas: si $\infty$ es una singularidad aislada de $f$, se define $\operatorname{Res}(f,\infty) := \operatorname{Res}(g,0)$, donde $g(z) = -f(1/z)/z^2$. Hacemos notar que, con el punto del infinito, puede ocurrir que $f$ tenga una singularidad evitable en el $\infty$ pero que, sin embargo, $\operatorname{Res}(f,\infty) \neq 0$. Comentamos que la definición que se da de residuo en el infinito pretende la igualdad que sigue, la cual, a efectos prácticos, puede resultar de utilidad: *si f es una función holomorfa en* $\Omega := \mathbb{C} \setminus S$*, donde S es finito, se verifica que*

$$\sum_{a\in S} \operatorname{Res}(f,a) + \operatorname{Res}(f,\infty) = 0.$$

Acabamos la lección estudiando el concepto de función meromorfa, el cual introducimos como sigue. Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se dice que es meromorfa, si es continua y satisface las condiciones: (a) el conjunto $P(f) = \{z \in \Omega : f(z) = \infty\}$ es discreto en $\Omega$ (*i.e.*, $\Omega \cap P(f)' = \emptyset$); (b) la restricción de $f$ al abierto $\Omega_0 := \Omega \setminus P(f)$ es holomorfa. Se desprende de forma inmediata de la definición, que los puntos de $P(f)$ son polos de la función holomorfa $f|_{\Omega_0}$. Si $f$, $g$ son funciones holomorfas en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, donde $g$ no es idénticamente nula, el cociente $f/g$ define en $\Omega$ una función meromorfa (usando el convenio habitual $c/0=\infty$ si $c\neq 0$). Si designamos por $\mathscr{M}(\Omega)$ el conjunto de las funciones meromorfas en $\Omega$, sumas, productos y cocientes (con denominador no idénticamente nulo) de elementos de $\mathscr{M}(\Omega)$ están de nuevo en $\mathscr{M}(\Omega)$. Como se verá en el curso *Análisis Complejo*, para $\Omega$ conexo, $\mathscr{M}(\Omega)$ es el cuerpo de fracciones de $\mathscr{H}(\Omega)$. Caracterizamos las funciones meromorfas como las funciones derivables con valores en $\mathbb{C}_\infty$. Sea $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}_\infty$, donde $\Omega\subset\mathbb{C}$ es abierto: si $a\in\Omega$ y $f(a)=\infty$, se dice que $f$ es derivable en $a$ cuando existe $r>0$ tal que $(1/f)\big(D(a,r)\big)\subset\mathbb{C}$ y $(1/f)|_{D(a,r)}$ es derivable en $a$ en sentido ordinario. Con esta definición, si $\Omega\subset\mathbb{C}$ es un abierto conexo, entonces $f\in\mathscr{M}(\Omega)$ si, y sólo si, $f$ es derivable en cada $z\in\Omega$. □

**Lección 4.2 Aplicaciones del teorema de los Residuos I.**

- Integrales impropias: repaso. Cálculo de integrales.
- Sumación de series. Series de Mittag-Leffler.

*Descripción.* [Ahl78, p. 154-162], [Car68, p. 113-125] y [Rem91, p. 395-406]. Empezamos la lección recordando la noción de integral impropia, que se hace extensiva a funciones con valores complejos: hablamos de funciones localmente integrables, condición de Cauchy para convergencia de una integral impropia, convergencia absoluta, criterio de comparación, integrales en valor principal, etc. La idea a partir de aquí es reducir el cálculo de determinadas integrales al cálculo de una suma finita de residuos para una función meromorfa adecuada, de forma similar a como ya hemos ilustrado en la lección anterior, véase la fórmula (4.1). Presentamos distintos tipos de integrales que responden a un método o procedimiento que se puede estandarizar, [Car68, p. 113-135]:

**Tipo I:** Sean $P$, $Q$ polinomios con $\mathrm{grado}(Q)-\mathrm{grado}(P)\geq 2$. Si $f=P/Q$ no tiene polos en el eje real, la siguiente integral impropia es absolutamente convergente y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}(f,a).$$

**Tipo II:** Sean $P$, $Q$ polinomios con $\mathrm{grado}(Q)-\mathrm{grado}(P)\geq 1$. Si $f=P/Q$ no tiene polos en el eje real, la siguiente integral impropia converge y su valor es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}\big(f(z)e^{iz},a\big).$$

**Tipo III:** Sean $P$, $Q$ polinomios tales que $\mathrm{grado}(Q)-\mathrm{grado}(P)\geq 1$. Se supone que $f=P/Q$ no tiene polos en el eje real, excepto en el origen, donde puede tener un polo simple. Entonces, para todo $\varepsilon>0$, las integrales

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)e^{ix}dx \quad \text{y} \quad \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x)e^{ix}dx$$

son convergentes, y su suma converge, cuando $\varepsilon \to 0$, hacia

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}\big(f(z)e^{iz},a\big) + \pi i \operatorname{Res}\big(f(z)e^{iz},0\big).$$

**Tipo IV:** Sean $P$, $Q$ polinomios tales que $\operatorname{grado}(Q) - \operatorname{grado}(P) \geq 2$. Se supone que $f = P/Q$ no tiene polos en el eje real positivo, aunque puede tener un polo simple en el origen. Entonces, si $0 < \alpha < 1$, la siguiente integral converge y su valor es

$$\int_0^\infty f(x)x^\alpha dx = \frac{4\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}} \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}\big(f(z^2)z^{2\alpha+1},a\big).$$

Comentamos que los resultados anteriores siguen siendo ciertos cuando se sustituyen las fracciones racionales $f = P/Q$ por funciones meromorfas con una cantidad finita de polos en $\mathbb{C}$, que se comportan en el $\infty$ como las sustituidas $P/Q$: por ejemplo, para integrales del Tipo I requerimos que exista $\lim_{z\to\infty} z^2 f(z) \in \mathbb{C}$. Son múltiples las aplicaciones concretas para ilustrar los métodos anteriores. Evaluamos numerosas integrales, entre ellas,

- la de Dirichlet, recordemos, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$,
- la de Gauss, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx = 1$, para cada $\xi \in \mathbb{R}$ (conducente a que la transformada de Fourier de la función $e^{-\pi x^2}$ es ella misma),
- o la de Poisson, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos bt}{t^2+a^2}\,dt = \frac{\pi}{2ae^{ab}}$.

Comentamos que esta última integral fue utilizada por Poisson para poner de manifiesto que algunos cambios “imaginarios” que Laplace y Euler habían realizado para el cálculo de integrales reales no estaban justificados. Poisson mostró que si se quiere calcular $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$, para $f(x)$ una función real de variable real, y se hace el cambio formal $x = t+ik$, con $k = 0,1,2,\ldots$, se pueden obtener valores distintos:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{b^2+x^2}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2b}\,(e^{-ab} - e^{ab}) & \text{si } k > b, \\[2ex] \dfrac{\pi}{b}\,e^{-ab} & \text{si } 0 \leq k < b. \end{cases}$$

Acabamos esta lección, eminentemente práctica, utilizando el teorema de los residuos para obtener sumas de series, véase [Hil59, p. 258-264]. Planteamos la siguiente situación general: llamamos *función sumadora* a una función meromorfa $\alpha \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$, con polos $P(\alpha) = \mathbb{Z}$, todos simples, que permanece acotada en $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\big\{z : |z| = R_n\big\}$, donde $R_n$ es una sucesión que verifica $n < R_n < n+1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Los ejemplos por antonomasia de funciones sumadoras, $\alpha(z) = \pi\cot\pi z$ y $\beta(z) = \pi/\operatorname{sen}\pi z$, cumplen las condiciones anteriores con $R_n = n+1/2$, siendo $\operatorname{Res}(\alpha,k) = 1$ y $\operatorname{Res}(\beta,k) = (-1)^{|k|}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Para funciones sumadoras demostramos el siguiente resultado.

**Proposición 4.2.1.** *Sean $\alpha \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ una función sumadora y $\alpha_k = \operatorname{Res}(\alpha, k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Si $P$ y $Q$ son polinomios y $f = P/Q$ no tiene polos en $\mathbb{Z}$, cada una de las condiciones*

*a) $\mathit{grado}(Q) - \mathit{grado}(P) \geq 2$,*

*b) $\mathit{grado}(Q) - \mathit{grado}(P) \geq 1$ y la función $\alpha$ es impar,*

*implica que*

$$\lim_n \sum_{|k| \leq n} \alpha_k f(k) = -\sum_{a \in P(f)} \operatorname{Res}(\alpha f, a).$$

*Si se cumple a) y la sucesión $\alpha_k$ es acotada, entonces la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k f(k)$ es absolutamente convergente.*

Aplicando la proposición anterior a varios casos particulares, obtenemos las clásicas fórmulas

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi a} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2},\\
\pi \cot \pi a &= \text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a-n} = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2},\\
\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a} &= \text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{|n|}}{a-n} = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2}.
\end{aligned}$$

Comentamos que estas sumas son los desarrollos de Mittag-Leffler de las funciones meromorfas consideradas, los cuales serán estudiados con más detalle en la asignatura *Análisis Complejo*; también serán utilizados para obtener la factorización en productos infinitos de diversas funciones enteras, como $\operatorname{sen} \pi z$. Como aplicación de las fórmulas anteriores, obtenemos algunas sumas llamativas, por ejemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ ó $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(2n+1)^2 = \pi^2/8$. Concluimos la lección utilizando de nuevo los métodos anteriores para estudiar las series del tipo $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{2m}$, donde $m = 2, 3, \ldots$, obteniendo el valor de sus sumas en función de los números de Bernoulli para llegar a las igualdades, [Mar65, p. 59-66]:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}. \qquad \square$$

**Lección 4.3 Aplicaciones del teorema de los Residuos II.**

- Principio del Argumento: interpretación.
- Teorema de Rouché. Aplicaciones.
- Criterios para la determinación de logaritmos y raíces de funciones holomorfas.
- Teorema de la aplicación abierta y función inversa. Caracterización de las funciones enteras inyectivas.

*Descripción.* [Ahl78, p. 152-154] y [Con78, p. 123-126]. Empezamos por demostrar el principio del argumento.

**Teorema 4.3.1 (Principio del argumento).** *Sea $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ no idénticamente nula en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, y $M = P(f) \cup \mathscr{Z}(f)$. Si $\Gamma$ es un ciclo de clase $C^1$ a trozos en $\Omega \setminus M$, que es $\Omega$-homólogo a $0$, se verifica que*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{a \in \mathscr{Z}(f)} \mathrm{Ind}(\Gamma, a) m(f,a) - \sum_{a \in P(f)} \mathrm{Ind}(\Gamma, a) m(f,a),$$

*donde las sumas involucradas son de soporte finito, y $m(f,a)$ es la multiplicidad de $a$ como cero o polo de $f$.*

La integral que aparece en el principio del argumento se puede interpretar como el índice respecto al origen del ciclo imagen $\Gamma^* = f \circ \Gamma$. Comentamos que el principio del argumento proporciona un método muy eficaz para el cálculo de las integrales involucradas en la caracterización de la existencia de logaritmos dada en la página 81, así como en la proposición 3.3.3, la cual nos ofrece una caracterización de la existencia de raíces $m$-ésimas holomorfas de funciones holomorfas. Como aplicación práctica, enseñamos un procedimiento para determinar abiertos maximales donde se pueden encontrar logaritmos y raíces $m$-ésimas de fracciones racionales $P/Q$.

Como consecuencia del principio del argumento obtenemos el teorema de Rouché.

**Teorema 4.3.2 (Rouché).** *Sean $f,g \in \mathscr{M}(\Omega)$ funciones meromorfas no idénticamente nulas en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, y sea $M = \mathscr{Z}(f) \cup \mathscr{Z}(g) \cup P(f) \cup P(g)$. Se supone que $\Gamma$ es un ciclo de clase $C^1$ a trozos en $\Omega \setminus M$ que es $\Omega$-homólogo a $0$. Si*

$$\big|f(z) + g(z)\big| < \big|f(z)\big| + \big|g(z)\big|, \quad \textit{para todo } z \in \mathrm{Imagen}(\Gamma),$$

*entonces*

$$\sum_{a \in \mathscr{Z}(f)} \mathrm{Ind}(\Gamma,a) m(f,a) - \sum_{a \in P(f)} \mathrm{Ind}(\Gamma,a) m(f,a) = \sum_{a \in \mathscr{Z}(g)} \mathrm{Ind}(\Gamma,a) m(g,a) - \sum_{a \in P(g)} \mathrm{Ind}(\Gamma,a) m(g,a),$$

*donde, en cada sumatorio, sólo interviene una cantidad finita de sumandos no nulos.*

Ilustramos el teorema de Rouché con numerosos ejemplos y ejercicios, conducentes a la determinación de ceros de funciones holomorfas en determinados recintos. Vemos cómo el teorema fundamental del álgebra puede obtenerse otra vez, ahora como consecuencia del teorema de Rouché. Un ejercicio bonito para realizar con el ordenador es dibujar, para un polinomio dado $p$, los conjuntos $A_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : |p(z)| \leq \varepsilon\}$; es interesante que el alumno llegue a comprender por qué, si elegimos $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$, la sucesión de conjuntos $A_{\varepsilon_1} \supset A_{\varepsilon_2} \supset \ldots$ va aproximándose a las raíces, y sus *tamaños* dependen de las multiplicidades de las mismas.

Como aplicación del principio del argumento, obtenemos el teorema de la aplicación abierta, [Ahl78, p. 130-134] y [Con78, p. 98-100].

**Teorema 4.3.3 (Teorema de la aplicación abierta).** *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ no es constante, entonces $f$ es abierta. Más concretamente, para cada $a \in \Omega$, si $b = f(a)$ y $m$ es la multiplicidad de $a$ como cero de $f(z) - b$, existe un entorno abierto de $a$, $U_a \subset \Omega$, tal que $V_b = f(U_a)$ es un entorno abierto de $b$ que verifica: para cada $w \in V_b \setminus \{b\}$, la función $z \to f(z) - w$ posee $m$ ceros distintos en $U_a$, y todos son simples.*

Comentamos que el teorema anterior también puede obtenerse a partir del teorema de la función inversa para aplicaciones de abiertos de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, que se explica en el curso de *Análisis Matemático II* (véase [Apo76, Teorema 13.6]), junto con el hecho de que si $f \in \mathscr{H}\big(D(a,\rho)\big)$ es no constante, entonces existen $0 < r < \rho$, $\varphi \in \mathscr{H}\big(D(a,r)\big)$ con $\varphi'(a) \neq 0$, y $m \in \mathbb{N}$, tales que $f(z) = f(a) + \big(\varphi(z)\big)^m$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Esta observación podría pasarse por alto puesto que, para funciones holomorfas, el teorema de la función inversa se sigue también del teorema 4.3.3. Como aplicación del teorema de la aplicación abierta, demostramos que si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ es inyectiva, entonces $f'(a) \neq 0$ para cada $a \in \Omega$, $G = f(\Omega)$ es abierto, y la inversa $f^{-1} : G \longrightarrow \Omega$ es holomorfa (*i.e.*, $f$ es un isomorfismo conforme entre $\Omega$ y su imagen). Combinando el teorema de la aplicación abierta y el estudio que hemos realizado en la lección 4.1 sobre singularidades en el infinito, probamos que las únicas funciones enteras inyectivas son los polinomios de la forma $az + b$, con $a \neq 0$. También demostramos:

**Teorema 4.3.4 (Teorema de la función inversa).** *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, $a \in \Omega$ y $f'(a) \neq 0$, entonces existe un entorno abierto de $a$, $U_a \subset \Omega$, tal que $f|_{U_a}$ es inyectiva, $V = f(U_a)$ es abierto, y la transformación inversa $g = \big(f|_{U_a}\big)^{-1} : V \longrightarrow U_a$ es holomorfa.*

Terminamos en la línea de [Con78, p. 124-125], estableciendo una fórmula integral para la función inversa: si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$ con $f'(a) \neq 0$, entonces existe $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ tal que $f|_{D(a,r)}$ es inyectiva, y su función inversa $g : f\big(D(a,r)\big) \longrightarrow D(a,r)$ viene dada por la integral

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{z f'(z)}{f(z) - w}\, dz,$$

donde $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. □

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Ahl78], [Apo76], [Con78], [Car68], [Hil59], [Mar65], [Rem91].

# Parte IV

# Análisis Complejo

# Análisis Complejo

| | |
|---|---|
| Código: | **1A7** |
| Nombre: | **Análisis complejo** |
| Descripción BOE: | **Variable compleja** |
| Tipo: | **Troncal (Segundo ciclo)** |
| Créditos: | **6 (4T + 2P)** |
| Duración: | **Cuatrimestral** |
| Contenidos: | **3 capítulos** |

Las asignaturas *Introducción a la Variable Compleja* y *Variable Compleja* están pensadas como una unidad, dividida a posteriori para hacer que se puedan explicar y evaluar como dos asignaturas distintas, correspondientes a cursos de licenciatura distintos. Dicho esto, es innegable que la división que proponemos podría ser otra, y que algunos contenidos de la segunda parte se podrían pasar a la primera y viceversa. No obstante, esta división que se propone es la que corresponde a los cursos que se están explicando en realidad en la Universidad de Murcia, y la práctica demuestra que, en líneas generales, están bien organizados y son seguidos con aprovechamiento por un buen porcentaje del alumnado.

Mientras la asignatura *Introducción a la Variable Compleja* gira en torno a la palabra *función*, la segunda, *Variable Compleja*, gira en torno a la palabra *transformación*, claro está, con excepciones. Por ejemplo, nos pareció descabellado hablar de *derivadas* en *Introducción a la Variable Compleja*, y no dar la interpretación de la derivada en términos geométricos sobre conservación, duplicación, etc. de ángulos. Ahora, la segunda asignatura empieza revisando lo que ya se dijo en la primera. Por contra, a pesar de que el teorema de los residuos permite obtener *sumas* de las que identificamos como desarrollos de Mittag-Leffler de funciones clásicas, no nos pareció oportuno estudiar en *Introducción a la Variable Compleja* el teorema de Mittag-Leffler: por un lado, no es realista en términos de créditos de la primera asignatura, y por otro lado, es más coherente abordar estos desarrollos en un contexto en el que el alumno encuentra y estudia las nociones de convergencia de sucesiones y series en los espacios de funciones involucrados.

Como en otras asignaturas, los ejemplos, ejercicios, situaciones concretas y estudio de funciones clásicas, serán los puntos de partida para elaborar la teoría que presentamos. Establecida la teoría general, y creado el ambiente, habitual en los cursos de variable compleja, de *ensimis-*

*mamiento* que produce la belleza de los resultados generales, volveremos una y otra vez a los ejercicios y ejemplos para delimitar aspectos delicados de la teoría expuesta.

### Objetivo de la asignatura

Proseguir con el estudio de las funciones de variable compleja iniciado en la asignatura *Introducción al Análisis Complejo*, completándolo con conceptos y resultados clásicos que conciernen a los siguientes temas:

- ▶ Sucesiones de funciones holomorfas y familias normales.
- ▶ Propiedades geométricas de las funciones analíticas como transformaciones del plano complejo, y problemas de representación conforme.
- ▶ Propiedades de las funciones armónicas y solución del problema de Dirichlet en el plano.
- ▶ Procedimientos especiales para representar funciones y su utilización en el estudio de funciones clásicas, como la función $\Gamma$ de Euler y la función $\zeta$ de Riemann.
- ▶ Propiedades de aproximación de funciones holomorfas por fracciones racionales.
- ▶ El alumno deberá conocer y comprender las demostraciones de los resultados centrales de la teoría, y adquirir destreza en su aplicación a situaciones concretas y en la resolución de problemas clásicos.

### Contenido

Hemos estructurado la asignatura en los tres grandes capítulos que siguen:



En el primer capítulo estudiamos las funciones holomorfas (respectivamente, meromorfas) como transformaciones del plano en sí mismo (respectivamente, de la esfera de Riemann en sí misma). Revisamos el concepto de aplicación conforme y estudiamos aplicaciones conformes elementales, haciendo énfasis en la transformación de unos dominios concretos en otros. Estudiamos la topología compacta abierta en $\mathscr{H}(\Omega)$, y demostramos los teoremas de Montel, Vitali y Hurwitz, que serán utilizados como herramientas en la prueba del teorema de representación conforme de Riemann. Una vez establecido el teorema de Riemann, demostramos diversas caracterizaciones analíticas de los abiertos simplemente conexos. Establecemos el teorema del Módulo Máximo (planteado en un marco general que se re-utilizará al estudiar funciones armónicas), y el lema de

Schwarz, que se utiliza, además de para demostrar el teorema de Riemann, para calcular los grupos de automorfismos del disco unidad, semiplanos, etc.

El segundo capítulo está dedicado al estudio de funciones armónicas reales y al problema de Dirichlet para regiones del plano. Estudiamos el concepto de función armónica conjugada. Utilizamos la caracterización establecida en el capítulo anterior de los abiertos simplemente conexos para demostrar que, el hecho de que cada función armónica tenga una función armónica conjugada, caracteriza los abiertos simplemente conexos. De aquí se sigue que las funciones armónicas son, localmente, la parte real de funciones holomorfas, y por ende, tienen la propiedad de la media y satisfacen el Principio del Máximo. Con estas herramientas estudiamos el problema de Dirichlet para el disco unidad, que es resuelto utilizando el núcleo de Poisson. En la última parte del capítulo, estudiamos el problema de Dirichlet para abiertos más generales a través de: *(a)* extensión a la frontera de isomorfismos conformes de abiertos simplemente conexos sobre el disco unidad; *(b)* familias de Perron de funciones subarmónicas. Para mostrar que el disco perforado $D^*(0,1)$ no es un dominio de Dirichlet, estudiamos la naturaleza de las singularidades de funciones armónicas.

En el tercer capítulo, de carácter eminentemente práctico, estudiamos series de funciones meromorfas y productos infinitos de funciones holomorfas, demostrando los teoremas de Mittag-Leffler y Weierstrass en el plano. Obtenemos la descomposición en fracciones simples y la factorización en factores elementales de las funciones clásicas y estudiamos la funciones $\Gamma$ de Euler y $\zeta$ de Riemann. Establecemos el teorema de Runge, el cual nos permite demostrar el teorema de Mittag-Leffler para abiertos arbitrarios. Probamos la fórmula de Jensen, que nos da una *estimación* de la distribución de los ceros de una función holomorfa acotada en el disco unidad, lo que utilizamos, junto con los productos de Blaschke, para demostrar el teorema de Müntz-Szasz.

## Objetivos concretos

*Estudiar* las propiedades de las funciones analíticas que tienen repercusión en los problemas de representación conforme: teoremas de la aplicación abierta, de la función inversa, del módulo máximo y, en especial, el lema de Schwarz.

*Resolver* problemas concretos de transformaciones conformes: cálculo de fórmulas para la transformación inversa y obtención de isomorfismos conformes entre abiertos concretos.

*Utilizar* algún programa informático para visualizar transformaciones conformes.

*Estudiar* las propiedades básicas de la topología natural en el espacio de las funciones holomorfas, y conocer criterios sencillos para establecer que una familia de funciones holomorfas es normal.

*Conocer* con detalle las ideas implícitas en la demostración del teorema de Riemann y las aplicaciones de este teorema a la topología del plano (caracterización de los abiertos simplemente conexos).

*Aplicar* los resultados sobre funciones analíticas y representación conforme al estudio de las funciones armónicas de dos variables y a la solución del problema de Dirichlet en abiertos sencillos.

*Conocer* cómo se aproximan funciones holomorfas generales por funciones holomorfas que son fracciones racionales con polos prefijados.

*Conocer* las técnicas de representación de funciones concretas mediante productos infinitos, desarrollos de Mittag-Leffler e integrales dependientes de un parámetro, con el fin de profundizar en el estudio de las funciones especiales clásicas ($\Gamma$ de Euler y $\zeta$ de Riemann).

## Prerrequisitos

La asignatura tratará de hacerse de la forma más autocontenida posible. Partimos de que el alumno ha cursado las asignaturas: *Topología* (Troncal, primer ciclo, 6 créditos), *Análisis Matemático I y II* (Troncales, primer ciclo, 18 y 15 créditos) e *Introducción al Análisis Complejo* (Obligatoria, primer ciclo, 7,5 créditos).

## Bibliografía seleccionada


☞ L. V. Ahlfors, *Complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1978, An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics. MR 80c:30001.

☞ J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, New York, 1978. MR 80c:30003.

☞ A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable. Vol. II*, Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965. MR 31 #5965.

☞ W. Rudin, *Análisis real y complejo*, tercera ed., McGraw-Hill, 1988.

Capítulo 1

# Las funciones derivables como transformaciones

**TEMARIO**



En este capítulo se estudian las funciones holomorfas (respectivamente, meromorfas) como aplicaciones del plano en sí mismo (respectivamente, de la esfera de Riemann en sí misma). Revisamos el concepto de aplicación conforme y estudiamos aplicaciones conformes elementales, insistiendo en la transformación de dominios concretos en otros. Los aspectos más teóricos del capítulo son los relacionados con el estudio de la topología compacta abierta en $\mathscr{H}(\Omega)$ (teoremas de Montel, Vitali y Hurwitz), que resulta esencial para la demostración que se presenta del teorema de Riemann en la última lección del capítulo. Otras herramientas que se estudian son el teorema del Módulo Máximo (planteado en un marco general que se volverá a utilizar al estudiar funciones armónicas), y el lema de Schwarz, que es esencial para la determinación de ciertos grupos de automorfismos y para culminar la demostración del teorema de Riemann.

**Lección 1.1 Transformaciones conformes en la esfera de Riemann.**

- Transformaciones conformes.
- Comportamiento local de funciones holomorfas.
- La esfera de Riemann. Transformaciones conformes en la esfera de Riemann: comportamiento local de funciones meromorfas.
- Transformaciones de Möbius.
- La transformación de Jukowski y cos.
- Transformación de unos dominios en otros.
- Complementos: funciones antiholomorfas.

*Descripción.* Esta lección tiene por objetivo revisar y ampliar los conocimientos sobre funciones holomorfas, como aplicaciones del plano en sí mismo, que el alumno ha cursado en la asignatura *Introducción al Análisis Complejo*, véanse las lecciones 1.3, 2.5 y 4.3. Recordamos el concepto de transformación conforme, [Rud88, p. 315-316], y los teoremas de la aplicación abierta y la función inversa para funciones holomorfas. Repasamos la noción de isomorfismo conforme entre abiertos, y mostramos que, gracias al teorema de la aplicación abierta, [Con78, p. 97-99] y [Ahl78, p. 130-133], se tiene:

**Proposición 1.1.1.** *Sean* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto y* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ *inyectiva. Entonces,* $f'(a) \neq 0$ *para cada* $a \in \Omega$*,* $G = f(\Omega)$ *es abierto y la función inversa* $f^{-1} : G \longrightarrow \Omega$ *es holomorfa. Consecuentemente,* $(f^{-1})'(b) \neq 0$ *para cada* $b \in G$*, y así,* $f$ *es un isomorfismo conforme de* $\Omega$ *sobre* $f(\Omega)$*.*

A continuación, [Con78, p. 8-11], recordamos el modelo de la compactificación $\mathbb{C}_\infty$ por un punto de $\mathbb{C}$ ofrecido por la esfera de Riemann $S^2 := \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$, tal y como se presentó en la lección 1.2 de la asignatura *Introducción al Análisis Complejo*. Recordamos cómo se construye geométricamente la proyección estereográfica y cuáles son las expresiones analíticas que la definen. Comentamos que la noción de conservación de ángulos orientados se puede extender a aplicaciones entre espacios euclídeos orientados de dimensión 2, después de identificarlos de forma canónica con $\mathbb{C}$. Comentamos cómo es posible extender la noción de conservación de ángulos orientados para aplicaciones definidas en abiertos de la esfera de Riemann. Sea $F : U \longrightarrow S^2$, cuyo dominio $U$ es un abierto de la esfera de Riemann $S^2$. Dado un punto $p \in S^2$, sea $E_p$ el espacio vectorial tangente a $S^2$ en $p$, dotado de la estructura euclídea inducida por $\mathbb{R}^3$, en el que se considera inmerso, y orientado mediante el vector normal entrante; es decir, $\{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2}\}$ es base positiva de $E_p$ cuando $\{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},\mathbf{n}\}$ es base positiva para la orientación canónica de $\mathbb{R}^3$, siendo $\mathbf{n}$ un vector normal entrante a $S^2$ en $p$. La aplicación $F$ definida en un abierto $U \subset S^2$, (respectivamente, $U \subset \mathbb{C}$) con valores en $S^2$ (respectivamente, en $\mathbb{C}$) se dice que conserva ángulos orientados en $p \in U$ cuando ocurre lo siguiente: si $\gamma_1,\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow U$ son dos curvas derivables que surgen de $p$ con vectores tangentes no nulos $\mathbf{v}_1 = \gamma_1'(0)$, $\mathbf{v}_2 = \gamma_2'(0)$, entonces sus imágenes son caminos derivables, con origen en $q = F(p)$, cuyos vectores tangentes

$$\mathbf{w}_1 = (F \circ \gamma_1)'(0), \ \mathbf{w}_2 = (F \circ \gamma_2)'(0)$$

son no nulos, y de forma que el ángulo orientado determinado por el par $(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)$ coincide con el ángulo orientado del par $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$. Se demuestra que la proyección estereográfica conserva ángulos orientados según esta definición.

Nos ocupamos, a continuación, de la generalización del concepto de derivada para una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$, tal y como ya hicimos en parte en la lección 4.1 de la asignatura *Introducción al Análisis Complejo*. Con las definiciones pertinentes, comprobamos que las funciones derivables, con derivada distinta de cero, inducen en la esfera de Riemann transformaciones que conservan ángulos orientados. Se pueden extender los conceptos de funciones holomorfa y meromorfa definidas en abiertos $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$, con $\infty \in \Omega$: se dice que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa cuando es derivable en cada $z \in \Omega$. Esto equivale a que su restricción a $\Omega_0 = \Omega \setminus \{\infty\}$ sea holomorfa en el sentido usual, con una singularidad evitable en $\infty$. Más en general, una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ que toma algún valor distinto de $\infty$ en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es derivable en todo punto si, y sólo si, es meromorfa (esto significa que $P(f) = \{p \in \Omega : f(p) = \infty\}$ no tiene puntos de acumulación en $\Omega$, y la restricción de $f$ al abierto $\Omega_0 = \Omega \setminus P(f)$ es holomorfa, con una singularidad aislada de tipo polo en cada $p \in P(f)$).

Las definiciones de transformación conforme y de isomorfismo conforme se extienden, de forma natural, al caso de aplicaciones $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$. Se dice que $f$ es conforme cuando es derivable en cada $a \in \Omega$, con $f'(a) \neq 0$. Un *isomorfismo conforme* del abierto $\Omega_1 \subset \mathbb{C}_\infty$ sobre el abierto $\Omega_2 \subset \mathbb{C}_\infty$ es una aplicación biyectiva $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ tal que $f$ y $f^{-1}$ son conformes. Si $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ es una biyección meromorfa entre dos abiertos $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}_\infty$ con inversa $g = f^{-1}$ meromorfa, entonces las derivadas de $f$ y $g$ no se anulan nunca, y por lo tanto, $f$ es un isomorfismo conforme. Para funciones meromorfas valen los teoremas de aplicación abierta y función inversa ya conocidos para funciones holomorfas.

**Teorema 1.1.2.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ un abierto conexo y $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ no constante. Entonces $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ es abierta. En particular, toda función racional $f : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ es abierta.*

**Corolario 1.1.3.** *Si $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es abierto y $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ es inyectiva, entonces $f'(a) \neq 0$ para cada $a \in \Omega$, $G = f(\Omega)$ es abierto, y la inversa $g = f^{-1} : G \longrightarrow \Omega$ es meromorfa (será holomorfa cuando $\infty \notin \Omega$), con $g'(b) \neq 0$ para todo $b \in G$. Por lo tanto, $f$ establece un isomorfismo conforme entre $\Omega$ y su imagen.*

La teoría de representación conforme se ocupa de determinar el conjunto $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$ de todos los isomorfismos conformes de $\Omega_1$ sobre $\Omega_2$. A estas alturas ya se dispone de herramientas suficientes para obtener

$$\Gamma(\mathbb{C}) = \Gamma(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \{az + b : 0 \neq a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}\},$$

$$\Gamma(\mathbb{C}_\infty) = \Gamma(\mathbb{C}_\infty, \mathbb{C}_\infty) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

La determinación del grupo de automorfismos de $\mathbb{C}_\infty$ nos lleva a estudiar las transformaciones de Möbius, cuyas propiedades son recordadas aquí, [Con78, p. 44-54], [Rud88, p. 317-319] y [Sch79]. Completamos, a continuación, parte del estudio que ya se realizó en la lección 2.5 de la asignatura *Introducción al Análisis Complejo* para determinar dominios del plano complejo en los que las funciones elementales establecen isomorfismos conformes sobre su imagen, prestando especial atención a cómo transformar cuadrantes en discos, coronas no concéntricas en coronas concéntricas, regiones determinadas por circunferencias tangentes en discos, etc.

Como complemento, invitamos al alumno a leer la exposición sobre conservación de ángulos que se presenta en [Rem91, 1.4, p. 15, y 2.1, p. 73], donde se dice que una aplicación $\mathbb{R}$-lineal y biyectiva $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ conserva los ángulos si

$$|w|\,|z|\,\langle Tw,Tz\rangle = |Tw|\,|Tz|\,\langle w,z\rangle, \quad \text{para cualesquiera } \ w,z \in \mathbb{C},$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ representa el producto escalar en $\mathbb{R}^2$. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, es diferenciable real, se dice que $f$ conserva ángulos si su diferencial $df(z)$ conserva los ángulos en todo punto $z$ del abierto $\Omega$. Se demuestra que una función $\mathbb{R}$-diferenciable, $f$, conserva ángulos en $\Omega$ si, y sólo si, $f$ o su conjugada $\overline{f}$ es holomorfa en $\Omega$ y la correspondiente derivada compleja no se anula nunca. Si además queremos que se conserve la orientación (*i.e.*, jacobiano de $f$ positivo en todos los puntos), se concluye que $f$ conserva los ángulos y la orientación si, y sólo si, $f$ es holomorfa y su derivada es no nula. □

**Lección 1.2 Teorema del Módulo Máximo.**

- Teorema del Módulo Máximo.
- Lema de Schwarz. Caracterización de los automorfismos del disco unidad. Caracterización de los automorfismos del semiplano superior.
- Otras aplicaciones del lema de Schwarz: funciones holomorfas que maximizan las derivada.
- Un recíproco del teorema del Módulo Máximo.

*Descripción.* [Con78, Chapter VI] y [Rud88, Capítulo 12]. En este capítulo se continúa con el estudio de las propiedades geométricas y topológicas de las funciones holomorfas, consideradas como transformaciones del plano complejo. Empezamos por establecer el teorema del módulo máximo para funciones holomorfas, que basamos en el lema que sigue; éste será utilizado de nuevo al estudiar funciones armónicas en las lecciones 2.1 y 2.3.

**Lema 1.2.1.** *Sea $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, que satisface la propiedad*

$$u(a) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{it})\,dt, \quad \textit{para cada } \ \overline{D(a,r)} \subset \Omega. \tag{1.1}$$

*Si $u$ alcanza en $\Omega$ un máximo absoluto, entonces $u$ es constante.*

Gracias a la Fórmula de Cauchy en su versión elemental para un disco, si $f = u+iv \in \mathscr{H}(\Omega)$, entonces $|f|$, $u$ y $v$ satisfacen (1.1). Aplicando el lema 1.2.1 obtenemos la primera versión del *teorema del módulo máximo*, el cual asegura que *si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ es una función holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, y su módulo $|f|$ alcanza en $\Omega$ un máximo relativo, entonces $f$ es constante*.

La demostración del teorema del módulo máximo utiliza el hecho de que si $|f|$ es constante en un disco, entonces $f$ también es constante, lo que se sigue directamente, o bien de las condiciones de Cauchy-Riemann, o bien del teorema de la aplicación abierta. Comentamos que el principio del módulo máximo puede ser demostrado, alternativamente, a partir de la igualdad

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(a+re^{it})\right|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n},$$

donde $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, para $|z-a| < r$, véase [Rud88, Teorema 10.24]. Las demostraciones que se presentan sirven para darse cuenta de que si $f = u + iv \in \mathscr{H}(\Omega)$ es holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, y $u$ o $v$ alcanza un máximo relativo en $\Omega$, entonces $f$ es constante. A continuación, presentamos una segunda versión del teorema del módulo máximo, véase [Rem91, p. 259-260] (notas históricas).

**Teorema 1.2.2 (Teorema del módulo máximo).** *Sean $K \subset \mathbb{C}$ compacto y $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua cuya restricción a su interior es holomorfa. Entonces*

$$\text{máx}\left\{|f(z)| : z \in K\right\} = \text{máx}\left\{|f(z)| : z \in \partial K\right\}.$$

En el caso de que los dominios de las funciones no sean necesariamente acotados, demostramos el siguiente resultado general, que nos sirve ahora para el módulo de una función holomorfa, y que nos será útil después para funciones armónicas.

**Teorema 1.2.3 (Principio del máximo, versión general).** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y sea $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua que satisface* (1.1). *Si se cumple*

$$\limsup_{z\to a} u(z) \leq c, \tag{1.2}$$

*para todo $a$ de la frontera de $\Omega$ en $\mathbb{C}_\infty$, entonces, o bien $u(z) < c$ para todo $z \in \Omega$, o bien $u(z) = c$ para todo $z \in \Omega$.*

Mostramos, mediante un ejemplo, que para la validez del teorema anterior se necesita que la acotación (1.2) se dé en todos los puntos de la frontera de $\Omega$ en $\mathbb{C}_\infty$, no siendo suficiente que la misma se satisfaga en los puntos de la frontera de $\Omega$ en $\mathbb{C}$. En conexión con este resultado comentamos, sin demostración, el teorema de Phragmen-Lindelöf. Como aplicación del teorema del módulo máximo demostramos el lema de Schwarz:

**Lema 1.2.4 (Schwarz).** *Sea $f \in \mathscr{H}\left(D(0,1)\right)$ tal que $f(0) = 0$ y $\left|f(z)\right| \leq 1$, para todo $z \in D(0,1)$. Entonces $\left|f(z)\right| \leq |z|$, para cada $z \in D(0,1)$, y $\left|f'(0)\right| \leq 1$. Si $\left|f(a)\right| = |a|$ para algún $a \neq 0$, ó si $\left|f'(0)\right| = 1$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\alpha}z$.*

Como una consecuencia del lema de Schwarz, calculamos los grupos de isomorfismos conformes del disco unidad $D(0,1)$ y del semiplano superior $H^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ en sí mismos, véase [Rem91, p. 269-272]:

$$\Gamma\big(D(0,1)\big) = \left\{ f \in \mathscr{H}\big(D(0,1)\big) : f(z) = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\ a \in \big(D(0,1)\big),\, \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\Gamma(H^+) = \left\{ f \in \mathscr{H}(H^+) : f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc>0 \right\}.$$

Como aplicación del lema de Schwarz demostramos la proposición 1.2.5, que aísla la idea esencial para la prueba del teorema de representación conforme de Riemann que se estudia en la lección 1.4.

**Proposición 1.2.5.** *Si $f:\Omega \longrightarrow D(0,1)$ es un isomorfismo conforme y $a = f^{-1}(0)$, se verifica que*

$$\begin{aligned} \big|f'(a)\big| &= \text{máx}\Big\{\big|g'(a)\big| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\, g(\Omega) \subset D(0,1),\, g(a)=0\Big\} \\ &= \text{máx}\Big\{\big|g'(a)\big| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\, g(\Omega) \subset D(0,1)\Big\} \\ &= \text{máx}\Big\{\big|g'(a)\big| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\, g(\Omega) \subset D(0,1),\, g \text{ inyectiva}\Big\} \end{aligned}$$

Acabamos la lección comentando, sin demostración, el siguiente recíproco del teorema del módulo máximo, [Rud88, Teorema 12.13]:

**Teorema 1.2.6.** *Sea $M$ un espacio vectorial de funciones complejas continuas en el disco unidad cerrado $\overline{D(0,1)}$, y sea $j(z) = z$, para cada $z \in \overline{D(0,1)}$. Supongamos que $M$ tiene las siguientes propiedades:*

*(i)* $1 \in M$.

*(ii) Para cada $f \in M$ se tiene que $jf \in M$.*

*(iii) Para cada $f \in M$ se tiene que* $\text{máx}\big\{|f(z)| : z \in \overline{D(0,1)}\big\} = \text{máx}\big\{|f(z)| : |z|=1\big\}$.

*Entonces, toda $f \in M$ es holomorfa en $D(0,1)$.* □

**Lección 1.3 Familias normales.**

- El espacio de las funciones continuas con la topología compacta abierta.
- Equicontinuidad. Subconjuntos compactos de espacios de funciones continuas: teorema de Ascoli-Arzelá.
- Teoremas de Weierstrass y de Hurwitz para sucesiones de funciones holomorfas.
- Familias normales: teorema de Montel. Condición suficiente de normalidad.
- Teorema de Vitali. Holomorfía de algunas integrales dependientes de un parámetro: holomorfía de la función $\Gamma$ en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

*Descripción.* [Con78, p. 142-154] y [Rud88, p. 319-320]. Empezamos recordando la siguiente proposición, que se presentó en la lección 1.2 de la asignatura *Introducción al Análisis Complejo*:

**Proposición 1.3.1.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto*

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n,\, d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq 1/n\}$$

*es compacto y está contenido en $\Omega$. Además, la sucesión $(K_n)_n$ cubre $\Omega$ y verifica $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular, para cada compacto $K \subset \Omega$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_m$.*

Se recuerda cómo se define la topología $\tau_K$ de convergencia uniforme sobre compactos en el espacio de funciones continuas $C(\Omega, E)$, donde $\Omega$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $(E, d)$ es un espacio métrico. Utilizamos la proposición anterior para demostrar que $\tau_K$ es metrizable, lo que nos permitirá, a partir de aquí, discutir clausuras, continuidad, etc., en $\big(C(\Omega, E), \tau_K\big)$ mediante sucesiones: *sea $(K_n)_n$ una sucesión de compactos en el abierto $\Omega$ como la construida en la proposición 1.3.1. Para $f, g \in C(\Omega, E)$, se define*

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n(f,g), \quad \text{con } \rho_n(f,g) = \text{máx}\big\{d\big(f(z), g(z)\big) : z \in K_n\big\}.$$

*Entonces, $\rho$ es una distancia en $C(\Omega, E)$ cuya topología asociada es $\tau_K$. Además, si $(E, d)$ es completo, entonces el espacio métrico $(C(\Omega, E), \rho)$ también lo es.* El objetivo principal de esta lección es caracterizar los subconjuntos compactos de $\big(\mathscr{H}(\Omega), \tau_K\big)$. Para ello, caracterizamos primero los subconjuntos compactos del espacio topológico $\big(C(\Omega, E), \tau_K\big)$, teorema de Ascoli-Arzelá. Con este fin damos la definición de familia equicontinua y demostramos que, si la familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ es equicontinua, su clausura $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$ en el espacio producto $(E^\Omega, \tau_p)$ también lo es, teniéndose que $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p} \subset C(\Omega, E)$ y que en $\mathscr{F}$ coinciden las topologías inducidas por $\tau_p$ y $\tau_K$. Probamos que si $(E, d)$ es un espacio métrico completo y $S \subset \Omega$ es un subconjunto denso, entonces toda sucesión equicontinua $(f_n)_n$ en $C(\Omega, E)$ que sea puntualmente convergente sobre $S$ converge uniformemente sobre compactos, y a partir de ahí, mediante un procedimiento diagonal, demostramos el teorema de Ascoli-Arzelá:

**Teorema 1.3.2 (Ascoli-Arzelá).** *Una familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ es relativamente compacta para la topología $\tau_K$ de la convergencia uniforme sobre compactos si, y sólo si, verifica las siguientes condiciones:*

*i) $\mathscr{F}$ es una familia equicontinua.*

*ii) Para cada $z \in \Omega$, el conjunto $\mathscr{F}(z) = \{f(z) : f \in \mathscr{F}\}$ es relativamente compacto en el espacio métrico $(E, d)$.*

Comentamos, sin demostración, que, con ayuda del teorema de Tychonoff, [Kel62, Teorema 13, p. 166], se puede probar el teorema de Ascoli-Arzelá en general (con dominio un espacio topológico general), [Kel62, Teorema 17, p. 265], sin necesidad de restringirse a sucesiones en las demostraciones.

A continuación, particularizamos los resultados anteriores cuando $E = \mathbb{C}$ con su distancia asociada al valor absoluto, y consideramos $\mathscr{H}(\Omega)$ como un subespacio de $\big(C(\Omega, \mathbb{C}), \tau_K\big)$. Recordamos el teorema de Weierstrass, demostrado en la lección 3.2 de la asignatura *Introducción al Análisis Complejo*, el cual, con el lenguaje aquí establecido, asegura que $\mathscr{H}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $\big(C(\Omega,\mathbb{C}),\tau_K\big)$, y que el operador derivada $D : \big(\mathscr{H}(\Omega),\tau_K\big) \longrightarrow \big(\mathscr{H}(\Omega),\tau_K\big)$, $D(f) = f'$, es continuo. Seguidamente, introducimos la noción de familia normal: *se dice que una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ es normal cuando, de cada sucesión $(f_n)_n$ en $\mathscr{F}$, se puede extraer una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos (es decir, $\mathscr{F}$ es un subconjunto relativamente compacto de $\big(\mathscr{H}(\Omega),\tau_K\big)$)*. Demostramos el teorema de Montel:

**Teorema 1.3.3. [Montel]** *Para una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ son equivalentes:*

*(i)* *$\mathscr{F}$ es normal.*

*(ii)* *$\mathscr{F}$ es acotada,* i.e., *para cada compacto $K \subset \Omega$ se verifica que* $\sup\big\{\|f\|_K : f \in \mathscr{F}\big\} < \infty$.

*Por lo tanto, $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ es $\tau_K$-compacta si, y sólo si, es $\tau_K$-cerrada y acotada.*

Comentamos que $\big(\mathscr{H}(\Omega),\tau_K\big)$ es un espacio localmente convexo, que la noción de acotación empleada más arriba corresponde al concepto de acotación estudiado en espacios localmente convexos, y que, como consecuencia del teorema de Montel y del teorema de Riesz, véase la lección 4.3 de la asignatura *Análisis Funcional*, el espacio $\mathscr{H}(\Omega)$ no puede dotarse de una norma cuya topología asociada sea $\tau_K$. El teorema de Montel, junto con el principio de identidad y el hecho de que en un espacio metrizable una sucesión contenida en un compacto es convergente si, y sólo si, tiene un único punto de aglomeración, nos permiten dar una prueba elegante del teorema de Vitali: *sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $(f_n)_n$ una sucesión acotada en $\big(\mathscr{H}(\Omega),\tau_K\big)$ que converge puntualmente en un conjunto $M \subset \Omega$ con $M' \cap \Omega \neq \emptyset$. Entonces $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos hacia una función $f \in \mathscr{H}(\Omega)$*. Completamos el análisis que hacemos de sucesiones convergentes de funciones holomorfas demostrando el teorema de Hurwitz, que aparece como una consecuencia del teorema de Rouché. A partir del teorema de Hurwitz deducimos el siguiente corolario, que es una de las claves para demostrar el teorema de representación conforme de Riemann en la lección siguiente:

**Corolario 1.3.4.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $(f_n)_n$ una sucesión de funciones inyectivas en $\mathscr{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Entonces, o bien $f$ es inyectiva, o bien $f$ es constante.*

Presentamos la siguiente condición suficiente de normalidad: *si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo y $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ verifica que existe $a \in \Omega$ con $\{f(a) : f \in \mathscr{F}\}$ acotado y $\overline{\bigcup\{f(\Omega) : f \in \mathscr{F}\}} \neq \mathbb{C}$, entonces $\mathscr{F}$ es una familia normal*. Vemos, sin demostración, el teorema de Montel-Caratheodory (véase [Con78, Theorem 4.1, p. 300]), el cual afirma que el resultado anterior se sigue verificando cuando la condición de *no densidad* allí impuesta se sustituye por la condición más débil: *existen $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq \beta$, tales que cada $f \in \mathscr{F}$ omite los valores $\alpha$ y $\beta$*. Acabamos la lección utilizando la técnica aprendida en el teorema de Vitali para probar que determinadas integrales dependientes de un parámetro son funciones holomorfas. Empleamos estas ideas para demostrar que, si definimos

$$F(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

entonces $F$ es una función holomorfa en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, [Con78, p. 180-182], lo que nos proporciona la fórmula integral para la función $\Gamma$ que será estudiada en la lección 3.5. $\square$

**Lección 1.4 El Teorema de Riemann.**

- El teorema de representación conforme de Riemann.
- Abiertos simplemente conexos: caracterización.

*Descripción.* [Con78, p. 160-164] y [Rud88, p. 321-323]. El objetivo central del capítulo es llegar a demostrar el teorema 1.4.1 que mostramos a continuación.

**Teorema 1.4.1 ([Rud88, p. 311]).** *Las siguientes propiedades de un abierto conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ son equivalentes:*

*(i)* $\Omega$ *es conformemente equivalente a* $D(0,1)$.

*(ii)* $\Omega$ *es simplemente conexo.*

*(iii)* $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ *es conexo.*

*(iv)* *Cada ciclo de clase* $C^1$ *a trozos en* $\Omega$ *es* $\Omega$*-homólogo a cero.*

*(v)* *Para cada ciclo* $\Gamma$ *de clase* $C^1$ *a trozos en* $\Omega$*, cada* $z \in \Omega \setminus \operatorname{Imagen}(\Gamma)$ *y cada* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$*, se satisface la fórmula* (3.6) *de la página 86.*

*(vi)* *Para cada ciclo* $\Gamma$ *de clase* $C^1$ *a trozos en* $\Omega$ *y cada* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$*, se tiene que* $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$.

*(vii)* $\Omega$ *es holomórficamente conexo,* i.e., *para cada* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$*, existe* $F \in \mathscr{H}(\Omega)$ *con* $F' = f$.

*(viii)* *Para cada* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ *con* $0 \notin f(\Omega)$*, existe* $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ *tal que* $e^g = f$.

*(ix)* *Para cada* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ *con* $0 \notin f(\Omega)$*, existe* $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ *tal que* $g^2 = f$.

Empezamos repasando las nociones de homotopía y abierto simplemente conexo. Recordamos que, en la asignatura *Introducción al Análisis Complejo*, ha sido demostrada la equivalencia de las propiedades *(iii)*–*(viii)*, véase la lección 3.4 correspondiente. A partir de aquí, la prueba del teorema es como sigue:

*(i)* $\Rightarrow$ *(ii)***:** es cierta incluso si sólo exigimos que $\Omega$ sea homeomorfo a $D(0,1)$.

*(ii)* $\Rightarrow$ *(iv)***:** se sigue del hecho de que si $\gamma$ es un camino de clase $C^1$ a trozos en un abierto $\Omega$ que es $\Omega$-homotópico a un camino constante, entonces $\gamma$ es $\Omega$-homólogo a cero.

*(viii)* $\Rightarrow$ *(ix)***:** es evidente.

*(ix)* $\Rightarrow$ *(i)***:** es el teorema de Riemann. Los preparativos de lecciones anteriores permiten probar, de forma elegante y concisa, el teorema de Riemann, [Con78, Theorem 4.2]. Vemos primero que, si se satisface *(viii)*, existe una función inyectiva $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, con $f(\Omega) \subset D(0,1)$. A partir de aquí demostramos, utilizando los teoremas de Montel y de Hurwitz (corolario 1.3.4),

que si definimos $\mathscr{F} = \left\{ f \in \mathscr{H}(\Omega) : f \text{ es inyectiva y } f(\Omega) \subset D(0,1) \right\}$, entonces, para cada $a \in \Omega$, existe $h \in \mathscr{F}$ verificando $|h'(a)| = \text{máx}\left\{ |f'(a)| : f \in \mathscr{F} \right\}$. Finalmente, partiendo de la condición *(viii)* y del lema de Schwarz, se prueba que la función $h$ antes elegida es sobreyectiva, y así termina la demostración.

Aislamos el teorema de Riemann como sigue, donde se insiste en la unicidad del isomorfismo conforme.

**Teorema 1.4.2 (Riemann).** *Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Entonces, para cada $a \in \Omega$, existe un único isomorfismo conforme $f : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ verificando $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$.*

Mostramos, para terminar, que la condición $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ exigida en el teorema 1.4.1 (también en el teorema de Riemann) es esencial, ya que, en virtud del teorema de Liouville, el resultado es falso cuando $\Omega = \mathbb{C}$. Comentamos que, sin embargo, $\mathbb{C}$ es homeomorfo a $D(0,1)$ y, en consecuencia, que todos los abiertos simplemente conexos del plano son homeomorfos entre sí. $\square$

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Ahl78], [Con78], [Kel62], [Rem91], [Sch79], [Rud88].

Capítulo 2

# Funciones armónicas

**TEMARIO**



En este capítulo estudiamos funciones armónicas reales y el problema de Dirichlet para regiones del plano. Estudiamos el concepto de función armónica conjugada, estableciendo que el hecho de que cada función armónica tenga una función armónica conjugada caracteriza los abiertos simplemente conexos. En particular, las funciones armónicas son, localmente, la parte real de funciones holomorfas, y por ende, tienen la propiedad de la medida y satisfacen el Principio del Máximo. Con estas herramientas, estudiamos el problema de Dirichlet para el disco unidad, que es resuelto utilizando el núcleo de Poisson.

En la última parte del capítulo abordamos el estudio del problema de Dirichlet para abiertos más generales a través de: *(a)* extensión a la frontera de isomorfismos conformes de abiertos simplemente conexos sobre el disco unidad; *(b)* familias de Perron de funciones subarmónicas.

**Lección 2.1 Funciones armónicas.**

- Funciones armónicas. Condiciones de Cauchy-Riemann.
- Función armónica conjugada. Armónicas conjugadas en discos.
- Las funciones armónicas como parte real de funciones holomorfas localmente.
- Abiertos simplemente conexos y existencia de funciones armónicas conjugadas.
- Propiedad de la media de funciones armónicas.
- Principio del Máximo y del Mínimo para funciones armónicas.
- Aplicaciones conformes en una corona.

*Descripción.* [Con78, p. 252-256]. Empezamos recordando la definición de función armónica que se dio en la lección 2.1 de la asignatura *Introducción al Análisis Complejo*: una función $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^2$, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, se dice que es armónica si

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

para cada $z \in \Omega$ ($\Delta$ se denomina operador diferencial de Laplace). Introducimos $A(\Omega)$ para representar el espacio vectorial real formado por las funciones $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que son armónicas en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $f = u + iv \in \mathscr{H}(\Omega)$, entonces $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ son funciones infinitamente diferenciables que, después de las condiciones de Cauchy-Riemann, son armónicas. Veremos en este capítulo que no hay más funciones armónicas que las que, localmente, son la parte real de una función holomorfa. Introducimos el concepto de función armónica conjugada: si $u \in A(\Omega)$ y existe $v \in A(\Omega)$ tal que $f = u + iv \in \mathscr{H}(\Omega)$, diremos que $v$ es armónica conjugada de $u$. Como consecuencia de las condiciones de Cauchy-Riemann, cuando $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo, si $v_1, v_2 \in A(\Omega)$ son funciones armónicas conjugadas de $u \in A(\Omega)$, entonces $v_1 - v_2$ es constante. Mostramos, mediante un ejemplo, que no toda función armónica tiene una función armónica conjugada: la función $\log|z|$ es armónica en el abierto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pero no posee función armónica conjugada en este abierto. En términos de formas diferenciales, la existencia de armónica conjugada se caracteriza en la proposición que sigue.

**Proposición 2.1.1.** *Para una función armónica $u \in A(\Omega)$ son equivalentes:*

*i) La forma diferencial $d^*u = -u_y dx + u_x dy$ es exacta en $\Omega$.*

*ii) $u$ tiene armónica conjugada en $\Omega$.*

*Cuando se cumplen estas condiciones, cada primitiva $v$ de $d^*u$ es una función armónica conjugada de $u$ en $\Omega$.*

Para un disco tenemos que si $u \in A\big(D(z_0, r)\big)$, entonces $u$ tiene armónica conjugada, que viene dada, explícitamente, por la fórmula

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x,t)\,dt - \int_{x_0}^{x} u_y(s,y_0)\,ds, \quad \text{con } x_0 = \operatorname{Re} z_0,\, y_0 = \operatorname{Im} z_0,$$

[Con78, Theorem 2.30]. Como consecuencia de lo anterior, cada $u \in A(\Omega)$ es, localmente, la parte real de una función holomorfa; en particular, $u$ es de clase $C^\infty$. De aquí se sigue fácilmente que la composición de una función holomorfa con una función armónica es una función armónica. Una combinación de estos resultados permite aislar el siguiente hecho: *si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $0 \notin f(\Omega)$, entonces $u(z) = \log\big|f(z)\big|$ es armónica*. Esto último, junto con la proposición 2.1.1 y la equivalencia *(viii)* $\Leftrightarrow$ *(ii)* del teorema 1.4.1, nos permite demostrar que un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo si, y sólo si, toda función armónica $u \in A(\Omega)$ tiene armónica conjugada. Las funciones armónicas no satisfacen el principio de identidad como las funciones holomorfas, pero sí cumplen la siguiente versión más débil: *si* $\Omega$ *es un abierto conexo y* $u \in A(\Omega)$ *es constante en algún disco contenido en* $\Omega$*, entonces* $u$ *es constante en* $\Omega$. Establecemos que las funciones armónicas tienen la propiedad de la media, es decir, si $u \in A(\Omega)$ y $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, se deduce que

$$u(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} u\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

Utilizando ahora el lema 1.2.1 y el teorema 1.2.3, se tienen los correspondientes teoremas del máximo y del mínimo para funciones armónicas.

**Teorema 2.1.2.** *Sea* $u \in A(\Omega)$ *armónica en un abierto conexo* $\Omega \subset \mathbb{C}$.

*i)* *Si* $u$ *alcanza un máximo (o mínimo) relativo en* $\Omega$*, entonces es constante.*

*ii)* *Si* $\limsup_{z \to a} u(z) \leq 0$ *para todo* $a \in \partial_\infty \Omega$*, entonces* $u(z) \leq 0$ *para todo* $z \in \Omega$*. Además, o bien* $u(z) < 0$ *para todo* $z \in \Omega$*, o bien* $u \equiv 0$.

En particular, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo, $\overline{\Omega}^\infty$ es su clausura en $\mathbb{C}_\infty$, y $u : \overline{\Omega}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, armónica en $\Omega$, tal que $u(z) = 0$ para cada $z \in \partial_\infty \Omega$, entonces $u$ es idénticamente cero en $\Omega$. Esta propiedad es la clave para razonar la unicidad en la solución al problema de Dirichlet que se presenta en la lección siguiente. Terminamos la lección demostrando que la condición necesaria y suficiente para que dos coronas $\Omega_1 = \left\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - a| < R_1\right\}$ y $\Omega_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : r_2 < |z - a| < R_2\right\}$ sean conformemente equivalentes, es que $R_1/r_1 = R_2/r_2$, véase [Rud88, p. 330-332]. $\square$

**Lección 2.2 El problema de Dirichlet para el disco unidad.**

- El problema de Dirichlet. Dominios de Dirichlet.
- Fórmula integral de Poisson.
- El núcleo de Poisson. Propiedades.
- Solución al problema de Dirichlet en $D(0,1)$.
- Las funciones continuas con la propiedad de la media como funciones armónicas.

*Descripción.* Siguiendo a [Con78, p. 269], planteamos el problema de Dirichlet: dados un abierto conexo y una función continua $\varphi : \partial_\infty \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, el *problema de Dirichlet* para la región $\Omega$ con la condición de frontera $\varphi$ consiste en encontrar, si existe, una función continua $u : \overline{\Omega}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

- $u|_\Omega$ es armónica,
- $u|_{\partial_\infty \Omega} = \varphi$.

Cuando el problema de Dirichlet tiene solución para cada función continua $\varphi : \partial_\infty \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que $\Omega$ es una *región de Dirichlet*. Observamos que el teorema del máximo 2.1.2 proporciona la unicidad, en caso de existencia, de la solución al problema de Dirichlet. El objetivo central de esta lección es probar que el disco $D(0,1)$ es un dominio de Dirichlet. Empezamos por demostrar que toda función continua en $\overline{D(0,1)}$, que es armónica en $D(0,1)$, queda determinada por sus valores en la circunferencia $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, lo que nos sirve como motivación para encontrar la solución al problema de Dirichlet en $D(0,1)$, [Con78, p. 257-260]:

**Teorema 2.2.1.** *Sea $u : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $u|_{D(0,1)}$ es armónica. Entonces, para cada $z \in D(0,1)$, se tiene que*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})K(e^{it},z)\,dt, \quad \text{donde } K(w,z) = \frac{|w|^2-|z|^2}{|w-z|^2}. \tag{2.1}$$

La demostración que presentamos del teorema precedente es un buen ejercicio de repaso de todos los conocimientos adquiridos por el alumno en los cursos de variable compleja, ya que utilizamos: la fórmula de Cauchy, el concepto de índice, la expresión de los automorfismos del disco en sí mismo, y el hecho de que toda función armónica en un disco es la parte real de una función holomorfa. El núcleo $K$ que interviene en la ecuación (2.1) aparece, de forma natural, al tomar partes reales en la fórmula de Cauchy. A continuación, nos ocupamos de expresar el núcleo anterior en distintas formas equivalentes. A partir de la igualdad

$$K(e^{it},re^{i\alpha}) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i(\alpha-t)}|^2}, \quad \text{para } z = re^{i\alpha},$$

reescribimos la integral de Poisson (2.1) como

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})P_r(\alpha-t)\,dt, \quad \text{con } 0 \le r < 1,$$

donde

$$\begin{aligned} P_r(\theta) &= \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) \\ &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta} \end{aligned}$$

es llamado *núcleo de Poisson*. Estudiamos las propiedades del núcleo de Poisson, que serán determinantes para la solución que ofreceremos del problema de Dirichlet en el disco:

(a) $0 \le P_r(\theta) = P_r(-\theta) = P_r(\theta+2\pi)$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$;

(b) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta)\,d\theta = 1$;

(c) $0 \le P_r(\theta) \le P_r(\delta)$, si $0 < \delta \le |\theta| \le \pi$.

La última propiedad implica, en particular, que $\lim_{r\to 1} P_r(\theta) = 0$ uniformemente sobre el conjunto $B_\delta = \{\theta : \delta \le |\theta| \le \pi\}$, lo que será clave para obtener la solución al problema de Dirichlet en $D(0,1)$. Observamos a continuación que, si $\varphi : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, la fórmula

$$f(z) = u(z) + iv(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt, \quad z \in D(0,1),$$

define una función holomorfa, cuya parte real es, precisamente,

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})P_r(\alpha - t)\,dt, \quad \text{para } z = re^{i\alpha}.$$

Esto completa todos los ingredientes que necesitamos para demostrar que el problema de Dirichlet tiene solución en el disco $D(0,1)$.

**Teorema 2.2.2.** *Si $\varphi : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe una única función continua $u : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando*

$$u|_{\mathbb{T}} = \varphi, \qquad u|_{D(0,1)} \text{ es armónica},$$

*que viene dada mediante la fórmula integral de Poisson,*

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})P_r(\alpha - t)\,dt, \quad \text{donde } z = re^{i\alpha}.$$

A partir de aquí es fácil ver que cada disco $D(a,R)$ es un dominio de Dirichlet, donde la fórmula integral de Poisson adopta la expresión

$$u(a + re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + Re^{it})\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\alpha - t) + r^2}\,dt, \quad 0 \leq r < R.$$

Utilizamos el resultado previo para concluir la lección demostrando que las funciones armónicas en un abierto $\Omega$ son, precisamente, las funciones continuas en $\Omega$ que tienen la propiedad de la media. $\square$

**Lección 2.3 El problema de Dirichlet para abiertos más generales.**

- Singularidades de una función armónica. $D^*(0,1)$ no es un dominio de Dirichlet.
- Extensión de biyecciones conformes a las fronteras de los abiertos. Abiertos simplemente conexos, con la propiedad de la extensión, como dominios de Dirichlet.
- Desigualdades de Harnack. Convergencia de sucesiones de funciones armónicas.
- Funciones subarmónicas. Principio del Máximo para funciones subarmónicas.
- Familias de Perron y barreras en puntos frontera.

*Descripción.* Empezamos probando que, si $u$ es armónica en la corona $\Omega = \{z : r < |z - a| < R\}$, entonces existen $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $u(z) = \alpha \log|z - a| + \operatorname{Re} f(z)$. De aquí se sigue fácilmente que, si una función $u \in A\big(D^*(a,R)\big)$ está acotada, entonces existe $\lim_{z\to a} u(z) = \alpha \in \mathbb{R}$, y que la función extendiendo $u$ a $D(a,r)$, que en $a$ toma el valor $\alpha$, es una función armónica, [SZ70, p. 348-351]. De lo anterior deducimos fácilmente que $D^*(0,1)$ no es un dominio de Dirichlet. El resto del capítulo está dedicado a buscar condiciones que aseguren que un abierto conexo es un dominio de Dirichlet. Gracias al teorema de Riemann, establecimos que todo abierto simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es conformemente equivalente al disco $D(0,1)$, véase la lección 1.4. Siguiendo a Rudin, [Rud88, p. 328-330], cuando el abierto simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ tiene la propiedad de que existe un isomorfismo conforme $h : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ que se puede extender a un homeomorfismo $\hat{h} : \overline{\Omega}^{\infty} \longrightarrow \overline{D(0,1)}$, se dice que $\Omega$ tiene la propiedad de la extensión. Observamos que, en tal caso, la restricción de $\hat{h}$ a $\partial_\infty\Omega$ es un homeomorfismo entre las fronteras $\partial_\infty\Omega$ y $\partial D(0,1)$. Comentamos, sin demostración, que si todo punto de la frontera $\partial\Omega$ es un punto frontera simple (lo que significa que, para cada sucesión $a_n \in \Omega$ con $\text{lím}_n a_n = a$, existen una función continua $\gamma : [0,1) \longrightarrow \Omega$ con $\text{lím}_{t\to 1} \gamma(t) = a$, y una sucesión estrictamente creciente $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} \cdots$ tal que $\gamma(t_n) = a_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$), entonces $\Omega$ tiene la propiedad de la extensión. Finalmente, remarcamos que todo abierto simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ con la propiedad de la extensión es una región de Dirichlet y que, en tal caso, la fórmula de Poisson tiene una equivalente en el abierto $\Omega$, [Mar65, p. 164-168].

Estudiamos la convergencia de sucesiones de funciones armónicas como paso previo para analizar los dominios de Dirichlet vía las familias de Perron de funciones subarmónicas. Demostramos que si una sucesión de funciones armónicas $u_n \in A(\Omega)$ converge uniformemente sobre compactos, la función límite $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ también es armónica. Establecemos las desigualdades de Harnack: *si* $u : \overline{D(a,R)} \longrightarrow [0,\infty)$ *es una función continua y armónica en* $D(a,R)$*, para cada* $r \in (0,R)$ *y cada* $\alpha \in [0,2\pi]$ *se verifica que*

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(a+re^{i\alpha}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a), \tag{2.2}$$

demostrando, a partir de ellas, que el espacio de las funciones armónicas $A(\Omega)$ se comporta, para sucesiones crecientes, como $\mathbb{R}$, [Con78, p. 260-262] y [Rud88, p. 267-268].

**Teorema 2.3.1.** *Para una sucesión creciente de funciones armónicas* $u_n \in A(\Omega)$ *en un abierto conexo* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, se satisface una de las dos alternativas siguientes:*

*i)* $\text{lím}_n u_n(z) = u(z) < \infty$*, para todo* $z \in \Omega$*.*
*ii)* $\text{lím}_n u_n(z) = \infty$*, para todo* $z \in \Omega$*.*

*En ambos casos, la convergencia es uniforme sobre compactos. Cuando se cumple i), la función límite* $u(z) = \text{lím}_n u_n(z)$ *es armónica.*

A continuación, [Con78, p. 256-274], introducimos la noción de función subarmónica en un abierto (continua y que satisface la desigualdad (1.1)); para estas funciones se verifica el principio del máximo, tal y como se vio en el teorema 1.2.3; si $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es subarmónica en un abierto conexo $\Omega$ y alcanza un máximo absoluto, entonces es constante. Probamos que $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es subarmónica si, y sólo si, para cada abierto conexo $G \subset \Omega$ y cada $u \in A(G)$, la función $v-u$ satisface en $G$ el principio del máximo. Sumas y máximos de un número finito de funciones subarmónicas son funciones subarmónicas. Seguidamente, introducimos el concepto de familia de

Perron: *si* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *es un abierto conexo y* $\varphi : \partial_\infty \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función continua, se define la familia de Perron como*

$$\mathscr{P}(\varphi,\Omega) = \Big\{ v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ subarmónica} : \limsup_{z\to a} v(z) \le \varphi(a), \text{ para todo } a \in \partial_\infty \Omega \Big\}.$$

Hacemos notar que si $M = \text{máx}\{|\varphi(z)| : z \in \partial_\infty \Omega\}$, entonces la función constante $-M$ pertenece a $\mathscr{P}(\varphi,\Omega)$. A continuación, observamos que si el problema de Dirichlet en $\overline{\Omega}^\infty$ tiene una solución, digamos $u : \overline{\Omega}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$, para la condición frontera $\varphi : \partial_\infty \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces se tiene que $u(z) = \sup\{v(z) : v \in \mathscr{P}(\varphi,\Omega)\}$, para todo $z \in \Omega$. En general, dada la familia de Perron $\mathscr{P}(\varphi,\Omega)$, la función $u(z) := \sup\{v(z) : v \in \mathscr{P}(\varphi,\Omega)\} < \infty$, para todo $z \in \Omega$, y $u \in A(\Omega)$. Para el resto de la lección, desempeña un papel importante la noción de punto barrera: *si* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *es un abierto conexo, una barrera en* $a \in \partial_\infty \Omega$ *es una función continua* $B : \overline{\Omega}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $B|_\Omega$ *es armónica y* $0 = B(a) < B(z)$*, para todo* $z \in \partial_\infty \Omega$, $z \neq a$. A continuación, demostramos el siguiente resultado.

**Teorema 2.3.2.** *Sean* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un abierto conexo y* $\varphi : \partial_\infty \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua. Si* $u \in A(\Omega)$ *es la función armónica proporcionada por*

$$u(z) = \sup\{v(z) : v \in \mathscr{P}(\varphi,\Omega)\}, \quad z \in \Omega,$$

*y existe una barrera en* $a \in \partial_\infty \Omega$*, entonces* $\text{lím}_{z\to a} u(z) = \varphi(a)$.

Razonamos que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es acotado y $a$ es un punto de $\partial\Omega$ tal que existe un segmento $[a,b] \subset \mathbb{C}$ verificando $[a,b] \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ y $[a,b] \cap \partial\Omega = \{a\}$, entonces $a$ posee una barrera. Como consecuencia, terminamos la lección demostrando el siguiente resultado.

**Corolario 2.3.3.** *Si* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *es un abierto conexo acotado tal que cada* $a \in \partial\Omega$ *es el extremo de un segmento* $[a,b] \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ *con* $[a,b] \cap \partial\Omega = \{a\}$*, entonces* $\Omega$ *es una región de Dirichlet.*

Comentamos, sin demostración, que es posible probar que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo tal que cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ no se reduce a un punto, entonces $\Omega$ es un dominio de Dirichlet. En particular, si $\Omega$ es simplemente conexo, entonces $\Omega$ es un dominio de Dirichlet. $\square$

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Con78], [Mar65], [FdlP80], [Rud88], [SZ70].

Capítulo 3

# Funciones holomorfas dadas por series y productos

**TEMARIO**



Este capítulo tiene un espíritu eminentemente práctico. Aquí estudiamos dos métodos para producir (representar) funciones: *(a)* series de funciones meromorfas; *(b)* productos infinitos de funciones holomorfas. El primer método se utiliza para descomponer funciones meromorfas en sumas de fracciones simples, y el segundo se emplea para factorizar funciones holomorfas a partir de sus ceros.

Demostramos los teoremas de Mittag-Leffler y Weierstrass en el plano, y obtenemos la descomposición en fracciones simples y la factorización en factores elementales de las funciones clásicas. Estudiamos la funciones $\Gamma$ de Euler y $\zeta$ de Riemann. También estudiamos el teorema de Runge, que nos permite demostrar el teorema de Mittag-Leffler para abiertos arbitrarios, y establecemos la fórmula de Jensen, la cual nos da una *estimación* de la distribución de los ceros de una función holomorfa acotada en el disco unidad, lo que utilizamos para demostrar el teorema de Müntz-Szasz.

**Lección 3.1 Desarrollos de Mittag-Leffler.**

- Convergencia de sucesiones y series de funciones meromorfas.
- El teorema de Mittag-Leffler en $\mathbb{C}$.
- Desarrollos de Mittag-Leffler de las funciones $(\pi/\operatorname{sen}\pi z)^2$ y $\pi\cot g\,\pi z$.

*Descripción.* [Ahl78, p. 187-190], [Car68, p. 172-178] y [Rem91, p. 321-331]. Si $f=P/Q$ es una fracción racional y $\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ son sus polos, con partes singulares $P_n\big(1/(z-a_n)\big)$, $1\le n\le m$, donde cada $P_n$ es un polinomio tal que $P_n(0)=0$, un sencillo argumento permite escribir

$$f(z)=p(z)+\sum_{n=1}^{m}P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right),$$

para cierto polinomio $p$. El objetivo de esta lección es extender la fórmula anterior al caso de funciones meromorfas generales $f\in\mathscr{M}(\mathbb{C})$, donde la suma finita se sustituirá por una serie. La primera tarea que acometemos es la de estudiar el concepto de sucesión o serie convergente de funciones meromorfas. En $\mathbb{C}_\infty$ consideramos la distancia cordal $d_\infty$, introducida en la lección 1.2 de la asignatura *Introducción al Análisis Complejo*, y el espacio métrico completo $(\mathbb{C}_\infty,d_\infty)$. Si $\Omega\subset\mathbb{C}$ es un subconjunto abierto, el espacio de funciones continuas $\big(C\big(\Omega,(\mathbb{C}_\infty,d_\infty)\big),\tau_K\big)$ vuelve a ser un espacio métrico completo, de acuerdo a los resultados presentados en la lección 1.3. El hecho de que la inversión $z\to 1/z$ sea una isometría para la distancia cordal, permite caracterizar la convergencia de sucesiones de funciones de $C(\Omega,\mathbb{C}_\infty)$ en términos *finitos*, es decir, del plano $\mathbb{C}$. A partir de esta caracterización probamos que, si $\Omega$ es un abierto conexo, entonces el cierre de $\mathscr{M}(\Omega)$ en $\big(C(\Omega,\mathbb{C}_\infty),\tau_K\big)$ es $\mathscr{M}(\Omega)\cup\{\infty\}$. Demostramos que si una serie $\sum_{n=1}^\infty f_n$ de funciones en $\mathscr{M}(\Omega)$ satisface que, para cada compacto $K\subset\Omega$, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que

(i) $P(f_n)\cap K=\emptyset$, para cada $n>m$, y

(ii) la serie $\sum_{n>m}f_n$ converge uniformemente sobre $K$,

entonces $\sum_{n=1}^\infty f_n$ converge en $\big(\mathscr{M}(\Omega),\tau_K\big)$, definiendo por tanto una función meromorfa. Demostramos a continuación el teorema de Mittag-Leffler en el plano $\mathbb{C}$.

**Teorema 3.1.1 (Mittag-Leffler).** *Sean $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios verificando $P_n(0)=0$, y $a_n\in\mathbb{C}$ una sucesión de puntos distintos dos a dos tal que*

$$|a_1|\le|a_2|\le|a_3|\le\ldots\le|a_n|\le\ldots\quad y\quad \lim_n|a_n|=\infty.$$

*Si para $|a_n|>0$ se tiene que*

$$P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}z^k,\quad para\ \ |z|<|a_n|,$$

*entonces se puede determinar una sucesión $(k_n)_n$ en $\mathbb{N}$ de forma que*

$$P_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\left[P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-\sum_{k=1}^{k_n}a_{nk}z^k\right]\tag{3.1}$$

*converge uniformemente sobre compactos y define una función $f\in\mathscr{M}(\mathbb{C})$, cuyos polos son, precisamente, $P(f)=\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$, tal que $P_n\big(1/(z-a_n)\big)$ es la parte principal de $f$ en $a_n$.*

Como consecuencia del teorema de Mittag-Leffler demostramos fácilmente que, si $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ tiene infinitos polos $P(f) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, que se suponen ordenados según módulos crecientes

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \ldots \leq |a_n| \leq |a_{n+1}| \leq \ldots,$$

y para cada $n$ tenemos que $P_n\big(1/(z-a_n)\big)$ es la parte principal de $f$ en $a_n$, entonces existen una función entera $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ y una sucesión de polinomios $Q_n$ tales que $f$ admite un desarrollo de la forma

$$f(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - Q_n(z) \right], \tag{3.2}$$

uniformemente convergente sobre compactos. Obtenemos así el desarrollo de Mittag-Leffler de $f$, donde, al no estar los polinomios $Q_n$ unívocamente determinados, se plantea el problema de encontrar la descomposición (3.2) más simple. Mostramos que, en casos sencillos, por ejemplo, para $P_n(z) = z$ y $(a_n)_n$ tal que $\sum_n 1/|a_n|^{k+1} < \infty$ para algún $k$, la sucesión $(k_n)_n$ que interviene en la expresión (3.1) puede tomarse constante, y por ende, la expresión (3.2) se simplifica. Concluimos la lección determinando los desarrollos concretos de funciones como

$$\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \quad \text{y}$$

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2},$$

que fueron obtenidos ya en la lección 4.2 de la asignatura *Introducción al Análisis Complejo*, utilizando el teorema de los residuos. □

**Lección 3.2 El Teorema de Runge.**

- Aproximación por fracciones racionales: el teorema de Runge.
- Aproximación por polinomios: caracterización de abiertos simplemente conexos.
- Construcción de una función universal entera: otra caracterización de los abiertos simplemente conexos.
- El teorema de Mittag-Leffler para un abierto arbitrario.

*Descripción.* [Con78, p. 195-202]. Comenzamos la lección observando que si $f \in \mathscr{H}\big(D(0,1)\big)$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, para $|z| < 1$, la convergencia uniforme sobre compactos de $D(0,1)$ de la serie, permite concluir que $f$ es el límite de una sucesión de polinomios en $\big(\mathscr{H}\big(D(0,1)\big), \tau_K\big)$. Por otro lado, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo y cada función $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ se aproxima en $\big(\mathscr{H}\big(D(0,1)\big), \tau_K\big)$ por una sucesión de polinomios, entonces $\Omega$ es simplemente conexo. Además, observamos que, si $\Omega = D^*(0,1)$, cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ es límite en $\big(\mathscr{H}(\Omega), \tau_K\big)$ de una sucesión de fracciones racionales con polos en 0 e $\infty$ (se utiliza el desarrollo de Laurent de $f$). El objetivo central de esta lección es demostrar el teorema de Runge que sigue:

**Teorema 3.2.1 (Runge).** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $E \subset \mathbb{C}_\infty$ un conjunto que corta a cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$. Entonces $R_E(\Omega) := \{R|_\Omega : R$ fracción racional, $P(R) \subset E\}$, es denso en $(\mathscr{H}(\Omega), \tau_K)$.*

La prueba del teorema de Runge la basamos en el siguiente lema, que se obtiene como consecuencia de la fórmula de Cauchy en su versión homológica.

**Lema 3.2.2.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $K \subset \Omega$. Existe un número finito de segmentos $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, paralelos a los ejes y contenidos en $\Omega \setminus K$, tales que, para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y cada $z \in K$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\sigma_k} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

A partir de aquí demostramos que cada función $z \to \int_{\sigma_k} f(w)/(w-z)\, dw$ se aproxima uniformemente sobre $K$ por fracciones racionales con polos en Imagen$(\sigma_k)$, de donde, finalmente, y con algún esfuerzo técnico adicional, llegamos a probar el teorema de Runge. Como aplicación de este resultado demostramos que *un abierto conexo $\Omega$ es simplemente conexo si, y sólo si, toda función holomorfa en $\Omega$ es límite de una sucesión de polinomios en $(\mathscr{H}(\Omega), \tau_K)$*. Comentamos, sin demostración, que es posible construir una función $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ que tiene la propiedad de que el conjunto de las derivadas $\{f^{(n)} : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ es denso en $(\mathscr{H}(\mathbb{C}), \tau_K)$, [BR83]; es un buen ejercicio para alumnos avanzados tratar de entender el artículo anterior, así como darse cuenta de que, con ayuda del teorema de Runge, el resultado sigue siendo válido cuando $\mathbb{C}$ se cambia por cualquier abierto simplemente conexo. Comentamos que, de hecho, un resultado de Shapiro de 1998 establece que un abierto conexo $\Omega$ es simplemente conexo si, y sólo si, existe $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $\{f^{(n)} : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ es denso en $(\mathscr{H}(\Omega), \tau_K)$.

Terminamos la lección utilizando el teorema de Runge para demostrar la versión general del teorema de Mittag-Leffler, tal y como se presenta en [Con78, p. 204-206]:

**Teorema 3.2.3 (Mittag-Leffler, versión general).** *Sean $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios verificando $P_n(0) = 0$, y $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto numerable en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ que no tiene puntos de acumulación en $\Omega$. Entonces, existe una función $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ con polos $P(f) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que $P_n(1/(z-a_n))$ es la parte principal de $f$ en $a_n$.* □

### Lección 3.3 Productos infinitos.

- Productos infinitos de números complejos. Condición necesaria de convergencia. Convergencia absoluta de números complejos.
- Productos infinitos de funciones. Convergencia absoluta y uniforme.
- Productos infinitos de funciones holomorfas: ceros de un producto.

- Factores elementales de Weierstrass: existencia de funciones holomorfas con ceros prescritos en el plano. Teorema de factorización de Weierstrass.
- Derivada logarítmica de un producto. Factorización de Weierstrass de $\operatorname{sen}\pi z$.
- Teorema de Weierstrass en un abierto del plano. Aplicación: una función holomorfa en $D(0,1)$ que no se puede prolongar.
- Un teorema de interpolación.

*Descripción.* [Con78, p. 164-174]. Empezamos observando el siguiente hecho elemental: dada una cantidad finita de puntos del plano complejo, existe un polinomio con ceros en los puntos dados y multiplicidades prescritas. El objetivo de esta lección es extender este resultado a subconjuntos discretos de $\mathbb{C}$ (más en general, de un abierto de $\mathbb{C}$), y establecer un resultado de factorización de funciones enteras (más en general, de funciones definidas en un abierto).

Introducimos la noción de convergencia de un producto infinito de números complejos: *dada una sucesión $z_n \in \mathbb{C}$, si la sucesión de los productos parciales $p_n = z_1 z_2 \cdots z_n$ es convergente hacia un valor no nulo,* $\lim_n p_n = p \neq 0$, *diremos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es estrictamente convergente hacia $p$. Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que el producto $\prod_{n=m+1}^{\infty} z_n$ es estrictamente convergente, se dice que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente hacia $p = z_1 z_2 \cdots z_m \prod_{n=m+1}^{\infty} z_n$.* Observamos que el valor $p$ es independiente de $m$ en la definición anterior y, claramente, se tienen las condiciones necesarias de que, tanto el término general, como los restos de un producto infinito, convergen hacia 1. Una condición necesaria y suficiente para que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ sea estrictamente convergente, es que $z_n \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$ sea convergente. De aquí se sigue que, para un producto escrito de la forma $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, la condición $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ equivale a que exista $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>m} \left|\operatorname{Log}(1+a_n)\right| < \infty$, y a que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+|a_n|\right)$ converja; cualquiera de estas condiciones implica que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge. Estas consideraciones nos llevan a definir el concepto de producto absolutamente convergente. Cuando tratamos con funciones $a_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ y un conjunto $K \subset \Omega$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n(z)\right|$ converge uniformemente sobre $K$ si, y sólo si, el producto $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+|a_n(z)|\right)$ converge uniformemente sobre $K$, en cuyo caso, el producto $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+a_n(z)\right)$ converge uniformemente sobre $K$. Damos la definición de producto $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ uniformemente convergente sobre compactos de $\Omega$, donde $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones holomorfas: una condición suficiente para la convergencia uniforme sobre compactos del producto, es que se tenga la convergencia uniforme sobre compactos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f_n(z) - 1\right|$. Probamos que si $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ es un producto de funciones $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$, que converge uniformemente sobre compactos, entonces $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, $\mathscr{Z}(f) = \bigcup_n \mathscr{Z}(f_n)$ y, para cada $a \in \mathscr{Z}(f)$, su multiplicidad como cero de $f$ es la suma de las multiplicidades de $a$ como cero de los factores $f_n$. A partir de aquí estudiamos los factores elementales de Weierstrass,

$$E_0(z) = 1 - z; \quad E_n(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}\right), \text{ si } n \geq 1,$$

para los que establecemos la desigualdad $\left|E_n(z)-1\right| \leq |z|^{n+1}$, cuando $|z| \leq 1$. Utilizando los factores elementales de Weierstrass demostramos que, si $M \subset \mathbb{C}$ es un conjunto sin puntos de acumulación ($M' = \emptyset$), y para cada $a \in M$ fijamos un número natural $m(a)$, entonces existe una función entera $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $\mathscr{Z}(f) = M$ y la multiplicidad de cada $a \in \mathscr{Z}(f)$ es $m(f,a) = m(a)$. Establecemos el siguiente teorema de factorización:

**Teorema 3.3.1 (Weierstrass).** *Sean $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ una función entera, no idénticamente nula, con infinitos ceros, y $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la sucesión de sus ceros no nulos, repetidos según multiplicidades. Entonces, existen una sucesión $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y una función entera $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, tales que*

$$f(z) = e^{g(z)} z^p \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(z/a_k),$$

*donde $p = 0$ si $f(0) \neq 0$, $p = m(f,0)$, si $f(0) = 0$, y el producto infinito converge uniformemente sobre compactos.*

Tras analizar la derivada logarítmica de un producto, establecemos factorizaciones de algunas funciones elementales, como $\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1 - z^2/n^2)$. Demostramos el teorema de Weierstrass para un abierto arbitrario del plano complejo, a partir del cual, fijando un conjunto discreto en $D(0,1)$ para el que cada punto de $\mathbb{T}$ es de acumulación, construimos una función holomorfa en $D(0,1)$ que no se puede prolongar analíticamente fuera de $D(0,1)$. Acabamos el capítulo combinando el teorema de Mittag-Leffler y el teorema de Weierstrass para demostrar el siguiente resultado de interpolación [Rud88, p. 346]:

**Teorema 3.3.2.** *Sea $\Omega$ un abierto en $\mathbb{C}$ y sea $A$ un subconjunto discreto de $\Omega$. Asociemos a cada $a \in A$ un número natural $m(a)$ y números complejos $w_{n,a}$, para todo $0 \leq n \leq m(a)$. Entonces, existe una función holomorfa en $\Omega$ tal que*

$$f^{(n)}(a) = n! w_{n,a},$$

*para todo $a \in A$ y todo $0 \leq n \leq m(a)$.* □

**Lección 3.4 La fórmula de Jensen.**

- Fórmula de Jensen.
- Productos de Blaschke.
- El teorema de Müntz-Szasz.

*Descripción.* [Rud88, p. 348-358]. Empezamos utilizando el teorema de Cauchy para probar las igualdades

$$\int_0^{2\pi} \log|1 - e^{i\theta}|\, d\theta = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|re^{i\theta} - re^{i\alpha}|\, d\theta = \log r,$$

y así, a partir de ahí, demostrar la fórmula de Jensen:

**Teorema 3.4.1 (Fórmula de Jensen).** *Sean* $\Omega = D(0,R)$ *y* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ *con* $f(0) \neq 0$. *Si* $0 < r < R$, *sean* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ *los ceros de* $f$ *en* $\overline{D(0,r)}$, *enumerados de acuerdo con sus multiplicidades. Entonces,*

$$\left| f(0) \right| \prod_{n=1}^{N} \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta \right).$$

La hipótesis $f(0) = 0$ no causa problemas a la hora de aplicar la fórmula de Jensen, pues si $f$ tiene un cero de orden $k$ en 0, se aplica la fórmula a la función $f(z)/z^k$. De acuerdo a los resultados presentados en la lección anterior, la localización de los ceros en un dominio $\Omega$ no está sometida a ninguna restricción, salvo la obvia, si la función no es idénticamente nula, de que el conjunto de los ceros sea discreto en el abierto. La situación es bastante diferente si sustituimos $\mathscr{H}(\Omega)$ por ciertas subclases definidas en términos de crecimiento de las funciones, véanse [Mar65, p. 236-240 y Chapter 9] y [Con78, Chapter XI]: en tales situaciones, la distribución de los ceros debe satisfacer determinadas condiciones. La base para la mayor parte de estos teoremas es la fórmula de Jensen, que utilizamos en la presente lección para demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 3.4.2.** *Sea* $f \in \mathscr{H}\big(D(0,1)\big)$ *una función acotada, no idénticamente nula, y sea* $(\alpha_n)_n$ *la sucesión de sus ceros, repetidos según multiplicidades, en* $D(0,1)$. *Entonces,* $\sum_n \big(1 - |\alpha_n|\big) < \infty$.

Recíprocamente, si $(\alpha_n)_n$ es una sucesión en $D(0,1)$ que satisface $\sum_n \big(1 - |\alpha_n|\big) < \infty$, siempre se puede construir una función $f \in \mathscr{H}\big(D(0,1)\big)$ acotada para la cual $\mathscr{Z}(f) = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$, a saber, el producto de Blaschke dado por

$$B(z) = z^k \prod_n \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}, \quad z \in D(0,1).$$

El teorema 3.4.2, junto con el teorema de Hahn-Banach, el teorema de Riesz, que permite calcular el dual de $\big(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$, el teorema de Weierstrass y el teorema de Morera, se utilizan en la demostración del teorema de Müntz-Szasz que sigue, el cual fue establecido con técnicas muy distintas en la lección 1.5 de la asignatura *Análisis Funcional*:

**Teorema 3.4.3 (Müntz-Szasz).** *Sea* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ *una sucesión de enteros positivos y sea* $X := \mathrm{lin}\{1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \ldots\}$ *en* $C\big([0,1]\big)$. *Se tiene:*

*(i)* *Si* $\sum_n 1/\lambda_n = \infty$, *entonces* $X$ *es denso en* $\big(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$.

*(ii)* *Si* $\sum_n 1/\lambda_n < \infty$ *y si* $\lambda \notin \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\lambda \neq 0$, *entonces* $t^\lambda \notin \overline{X}$. $\square$

**Lección 3.5 La función $\Gamma$ de Euler.**

- La función $\Gamma$ como generalización del factorial: definición como producto infinito.
- Fórmula de Gauss. Fórmula de los complementos. Fórmula integral para la función $\Gamma$.
- Teorema de Bohr-Mollerup.

*Descripción.* La función $\Gamma(z)$, introducida por Euler, es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ que extiende la función factorial definida por $f(n) = (n-1)!$, para $n \in \mathbb{N}$. Dado que esta función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ queda caracterizada por la ecuación funcional $f(n+1) = nf(n)$ y el valor inicial $f(1) = 1$, nos planteamos, como motivación para la definición de la función $\Gamma$, buscar una función compleja de variable compleja $f(z)$ que satisfaga:

$$f(1) = 1 \quad \text{y} \quad f(z+1) = zf(z), \text{ si } z \neq 0. \tag{3.3}$$

Razonamos que esta ecuación fuerza a que $f$ debe tener polos simples en los enteros no positivos $-n$, $n = 0,1,\ldots$, y a que, en cada uno de estos puntos, el residuo es $(-1)^n/n!$. Esto nos lleva a definir la función $\Gamma$ como la inversa de una función $F$ con ceros en los enteros no positivos y, cuando imponemos que se satisfaga la ecuación funcional (3.3) llegamos a la expresión

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+z}\right) e^{z/n},$$

donde $\gamma = \text{lím}_m \left[(\sum_{n=1}^{m} 1/n) - \log m\right]$. La función $\Gamma$ no es la única solución meromorfa de la ecuación funcional (3.3), pues si $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ es una función entera, periódica de periodo 1, que cumple $g(1) = 1$, se comprueba fácilmente que $f(z) = g(z)\Gamma(z)$ también satisface la ecuación funcional. Establecemos la fórmula de Gauss, que nos da la identidad

$$\Gamma(z) = \text{lím}_n \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)},$$

para $z \notin \{0,-1,-2,\ldots,-n,\ldots\}$, y la fórmula de los complementos

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z},$$

para $z \notin \mathbb{Z}$, de donde obtenemos la conocida igualdad $\Gamma(1/2)^2 = \pi$.

En la lección 1.3 hemos establecido que la integral $F(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ define una función holomorfa en el semiplano de la derecha $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Probamos aquí que, para $x$ en el semieje real positivo, se tiene que

$$F(x) = \text{lím}_n \frac{n!\, n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \Gamma(x),$$

con lo que $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$, para cada $z \in \mathbb{C}$. Terminamos la lección con una nueva aplicación de la fórmula de Gauss. Observamos que, para $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{n \in \mathbb{Z} : n \leq 0\}$, se verifica que

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(n+z)},$$

de donde deducimos que, si $x > 0$, la función $\log \Gamma(x)$ es una función convexa. La fórmula de Gauss permite establecer el siguiente teorema de Bohr-Mollerup: *si* $f : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ *es una función tal que* $\log f(x)$ *es convexa,* $f(1) = 1$ *y* $f(x+1) = xf(x)$ *para* $x > 0$, *entonces* $f(x) = \Gamma(x)$ *para cada* $x > 0$. $\square$

**Lección 3.6 La función $\zeta$ de Riemann.**

- Definición de la función $\zeta$.
- Factorización de Euler de la función $\zeta$.
- Relación entre las funciones $\Gamma$ y $\zeta$: extensión de $\zeta$ a una función meromorfa en $\mathbb{C}$.
- Ecuación funcional de Riemann: ceros triviales de la función $\zeta$.
- La conjetura de Riemann.

*Descripción.* [Con78, p. 187-194]. Comenzamos definiendo la función $\zeta$ de Riemann en el semiplano $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ mediante la suma de la serie $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z$. Con el criterio de Weierstrass se comprueba que la serie converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$, y así, $\zeta$ es una función holomorfa en el semiplano $\Omega$. Por otro lado, la fórmula de Euler, teorema 3.6.1, permite demostrar que $\zeta(z) \neq 0$ si $\operatorname{Re} z > 1$.

**Teorema 3.6.1 (Fórmula de Euler).** *Si $(p_n)_n$ es la sucesión de los números primos $(2,3,5,7,\dots)$ y $\operatorname{Re} z > 1$, entonces se verifica que*

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}},$$

*donde el producto converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$.*

A partir de aquí nos ocupamos de demostrar que $\zeta$ se puede prolongar analíticamente a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un único polo (simple) en $z = 0$, y que sus ceros fuera de la banda crítica $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\}$ (los llamados ceros triviales) son $\mathscr{Z}(\zeta) \setminus B = \{-2n : n \in \mathbb{Z}\}$. Para ello demostramos que si $\operatorname{Re} z > 1$, entonces se verifica que $\zeta(z)\Gamma(z) = F(z)$, donde

$$F(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt$$

está definida y es holomorfa en $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$, admitiendo una prolongación (única) a una función $\hat{F} \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con polos simples en $\{1, 0, -1, -3, -5, \dots, -(2n+1), \dots\}$. La combinación de los resultados previos nos da:

**Teorema 3.6.2.** *La función $\zeta$ se puede prolongar analíticamente a una función meromorfa en $\mathbb{C}$, con un único polo simple en $z = 1$, y ceros en los puntos $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$.*

A continuación, establecemos la ecuación funcional de Riemann, teorema 3.6.3, la cual permite demostrar que los únicos ceros de $\zeta$ en el semiplano $\operatorname{Re} z < 0$ son $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$.

**Teorema 3.6.3 (Ecuación funcional de Riemann).**

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right).$$

Lo anterior nos deja a las puertas de recordar la conjetura de Riemann, con la que termina el curso: en 1859, Riemann afirmó que la función $\zeta$ tiene infinitos ceros en la banda crítica $B$, y que el número de ceros $N(T)$ en $B \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in [0,T]\}$ verifica

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1+\log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T).$$

La primera afirmación fue demostrada por Hadamard en 1859, y la segunda por Mangolet en 1905. Riemann también formuló la conjetura de que todos los ceros de $\zeta$ en la banda crítica quedan en la recta $\operatorname{Re} z = 1/2$.

En 1914, Hardy logró demostrar que existían infinitos ceros en dicha recta, y en 1938, Tichmarch probó que en el rectángulo $\{x+iy \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1, 0 < y < 1648\}$ habían, exactamente, 1041 ceros, todos ellos en la recta $\operatorname{Re} z = 1/2$. En 1975, Levison demostró que esta recta contenía, asintóticamente, más de $1/3$ de los ceros que tiene $\zeta$ en la banda $B$. Con la ayuda de los ordenadores ha sido posible extender todos estos cálculos en los últimos años. Todos los ceros encontrados están en la recta $\operatorname{Re} z = 1/2$, [NP82, p. 289-305]. $\square$

### Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Ahl78], [BR83], [Car68], [Con78], [Mar65], [NP82], [Rem91], [Rud88].

# Parte V

# Análisis Funcional

# Análisis Funcional

| | |
|---|---|
| Código: | **1A6** |
| Nombre: | **Análisis funcional** |
| Descripción BOE: | **Análisis funcional** |
| Tipo: | **Troncal (Segundo ciclo)** |
| Créditos: | **6 (4T + 2P)** |
| Duración: | **Cuatrimestral** |
| Contenidos: | **6 capítulos** |

Se podrían dar muchas definiciones de *Análisis Funcional*. Su nombre sugiere aquella parte de las Matemáticas que trata con funciones, pero esto significa prácticamente todo el Análisis Matemático. Siguiendo a Dieudonné diremos que:

> *«El Análisis Funcional es la rama de las Matemáticas que estudia los espacios vectoriales topológicos y las aplicaciones* $u : \Omega \longrightarrow F$ *de una parte* $\Omega$ *de un espacio vectorial topológico* $E$ *en un espacio vectorial topológico* $F$*, donde estas aplicaciones se supone que verifican ciertas condiciones algebraicas y topológicas».*

Un momento de reflexión muestra cómo esta definición cubre una gran parte del Análisis Moderno, como por ejemplo, los espacios de Hilbert y de Banach, la teoría espectral de las distribuciones, la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales, etc.

Los objetos que se consideran en Análisis Matemático, espacios euclídeos, funciones continuas, diferenciables, integrables, holomorfas, etc., están claramente diferenciados. Sin embargo, poseen también una serie de características que hacen posible analizar algunas de sus propiedades de forma unificada, con una economía de medios y con una comprensión global de las mismas. Algunos de los puntos de vista novedosos del Análisis Funcional son la búsqueda de buenas estructuras de clasificación para los objetos del Análisis Matemático, el estudio abstracto de las propiedades de éstas y la utilización de aplicaciones lineales continuas como herramientas para modelizar problemas. Los espacios de Banach y de Hilbert, objeto de estudio de esta asignatura, constituyen estructuras de clasificación de objetos matemáticos tan útiles como puedan ser las estructuras que se manejan en otras ciencias.

Introduciremos al alumno en esta materia a través de ejemplos concretos, para, a partir de ahí, llegar a una teoría elegante y precisa, que será aplicada, a su vez, a situaciones concretas para proporcionar nuevos e importantes ejemplos que modelizan problemas físicos y/o resuelven problemas clásicos de ecuaciones diferenciales.

## Objetivo de la asignatura

El objetivo primordial de la asignatura es asimilar y manejar los principales conceptos del Análisis Funcional y sus aplicaciones. No es posible explicar en un curso de 6 créditos todos los contenidos que se relacionan más adelante. Sí es posible, sin embargo, hacer distintas elecciones para cubrir, en los seis créditos, los objetivos generales distintos que se listan debajo:

*Teoría espectral en Hilbert y los tres Principios Fundamentales* *Capítulos: 1, 2, 3, 4, 5.*

- Conocer y saber utilizar el teorema de la proyección en espacios de Hilbert y la existencia de bases hilbertianas para abordar cuestiones de aproximación y optimización.
- Utilizar el teorema espectral en espacios de Hilbert para resolver algunos sistemas lineales infinitos y ecuaciones diferenciales o integrales.
- Conocer, utilizar y aplicar los Principios Fundamentales del Análisis Funcional (el teorema de Hahn-Banach, el Principio de la Acotación Uniforme y el teorema de la Gráfica Cerrada).

*Teoría espectral en Hilbert y Teoría de Riesz en Banach* *Capítulos: 1, 2, 3, 6, y parte del 4 y 5.*

Los objetivos primero y segundo de la opción anterior son también objetivos de esta opción, y ahora se completan:

- Conocer los rudimentos básicos de los tres Principios Fundamentales del Análisis Funcional.
- Conocer y aplicar la teoría de Riesz para operadores compactos entre espacios de Banach.

## Contenido

Hemos estructurado la asignatura en los seis capítulos que siguen:



Los tres primeros capítulos están dedicados al estudio de la geometría de los espacios de Hilbert y a la teoría de operadores entre ellos. El capítulo 1 contiene los resultados básicos sobre espacios de Hilbert, como son, la noción de ortogonalidad, el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, el teorema de la proyección, el teorema de Riesz-Fisher, la existencia de bases hilbertianas y el teorema de representación de Riesz. Estudiamos bases hilbertianas en los espacios clásicos $L^2(\mathbb{T})$ y $A^2(\Omega)$, y damos aplicaciones a fórmulas de cuadratura y teoría de representación conforme. Estudiamos la equivalencia entre el teorema de Riesz y la existencia de soluciones a problemas variacionales cuadráticos, aplicándolo al estudio de soluciones débiles para la ecuación de Poisson $-\triangle u(x) = f(x)$. En el capítulo 2 nos ocupamos del estudio de los operadores acotados en espacios de Hilbert, introduciendo la noción de operador adjunto y estudiando las clases de operadores autoadjuntos, normales, unitarios y compactos. El capítulo 3 está dedicado a la teoría espectral elemental de operadores en espacios de Hilbert, siendo el principal resultado que establecemos aquí el teorema espectral para operadores compactos normales, que se aplica al estudio de la ecuaciones integrales de Fredholm de núcleo simétrico y al problema de Sturm-Liouville, aplicaciones que han sido elegidas para mostrar la potencia de estos métodos.

En la segunda parte, constituida por los capítulos 4, 5 y 6, estudiamos la teoría general de espacios Banach y de operadores entre ellos. En el capítulo 4 nos dedicamos al estudio de las primeras propiedades de los espacios de Banach y sus duales. Uno de los teoremas más importantes, el de Hahn-Banach, es establecido aquí, y una vez estudiadas sus consecuencias geométricas, abordamos el estudio de las topologías débiles y la reflexividad. Los cálculos de duales de espacios concretos, el estudio de los espacios finito-dimensionales, numerosas aplicaciones del teorema de Hahn-Banach y una pequeña introducción a los espacios uniformemente convexos, confieren a este capítulo un carácter elemental, pero a la vez, suficiente, para poder abordar cuestiones más específicas sobre estos temas. El capítulo 5 contiene los otros Principios Fundamentales del Análisis Funcional, el Principio de la Acotación Uniforme y el teorema de la Gráfica Cerrada, los cuales son ilustrados con bastantes aplicaciones. La presentación que hacemos del teorema de la Gráfica Cerrada a través de conjuntos CS-cerrados es especialmente simple y susceptible de potentes extensiones. Las bases de Schauder son estudiadas aquí por su interrelación con el teorema de la Gráfica Cerrada. La teoría de operadores entre espacios de Banach se estudia en el capítulo 6, donde, fundamentalmente, nos ocupamos de los operadores compactos, desarrollando para ellos la teoría de Riesz-Schauder; ésta se utiliza para obtener *las alternativas de Fredholm*, las cuales son a su vez aplicadas al estudio de ecuaciones integrales y de sistemas infinitos de ecuaciones lineales.

## Objetivos concretos

*Enmarcar*, en el contexto de los espacios de Banach, los espacios de sucesiones, espacios de funciones continuas, espacios de funciones diferenciables u holomorfas, etc., que el alumno ha encontrado anteriormente en otras asignaturas de Análisis Matemático, estableciendo, en particular, las desigualdades de Hölder y Minkowski.

*Reconocer* normas concretas que derivan de un producto escalar, utilizando como *test* la *Ley del Paralelogramo*.

*Utilizar* la existencia de mejores aproximaciones en espacios de Hilbert como herramienta para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones. Derivar, del teorema de la proyección, resultados clásicos de aproximación, como el teorema de Müntz-Szasz.

*Analizar* la conexión existente entre el problema de mejor aproximación y ciertos problemas variacionales sobre la existencia de mínimo en determinadas formas cuadráticas, para utilizarlo como herramienta en la justificación analítico-funcional de la existencia y unicidad de solución del problema de Dirichlet general.

*Introducir* el concepto de base hilbertiana y manipular coordenadas en espacios de dimensión infinita para resolver ecuaciones.

*Construir* una base hilbertiana del espacio $L^2\big([-\pi,\pi]\big)$.

*Presentar* bases hilbertianas formadas por polinomios ortogonales, y utilizarlas para obtener fórmulas de cuadratura Gaussiana.

*Obtener* bases hilbertianas en el espacio de Bergman $A^2(\Omega)$.

*Manipular* ejemplos concretos de operadores, elegidos, bien porque tienen un comportamiento simple, comprensible y susceptible de modelización de situaciones más complejas, bien porque son importantes en las aplicaciones.

*Representar* operadores en espacios de dimensión infinita mediante matrices infinitas.

*Entender* el concepto de espectro para un operador $T$ y relacionarlo con la resolución de ecuaciones del tipo $Tx = y$, para $y$ y $T$ dados, lo cual está conectado a su vez, claro está, con la invertibilidad de $T$.

*Distinguir* entre los distintos tipos de operadores y clasificarlos por propiedades de ellos mismos o de sus adjuntos. Manipular ejemplos de operadores de rango finito, compactos, autoadjuntos, etc.

*Discutir* algunas aplicaciones del teorema espectral a la resolución de determinados tipos de ecuaciones integrales, con aplicaciones al problema de Sturm-Liouville y a ecuaciones que se reducen a sistemas de Sturm-Liouville.

*Resolver* el problema de Dirichlet en un cuadrado.

*Establecer* el teorema de extensión de Hahn-Banach y utilizarlo como herramienta para estudiar cuestiones abstractas de aproximación y separación de conjuntos convexos.

*Estudiar* el teorema de la Categoría de Baire y sus consecuencias en espacios de Banach: el teorema de la Acotación Uniforme y el teorema de la Gráfica Cerrada.

*Manejar* los tres Principios Fundamentales del Análisis Funcional para deducir la existencia de límites de Banach, existencia de funciones continuas con series de Fourier puntualmente divergentes, métodos de sumabilidad, equivalencia entre holomorfía débil y holomorfía fuerte para funciones con valores en espacios de Banach, continuidad de los coeficientes asociados a una base de Schauder, etc.

*Estudiar* las normas uniformemente convexas como extensiones de las normas asociadas a productos escalares. Calcular el dual de los espacios $L^p(\mu)$. Clasificar los espacios clásicos $c_0$, $c$, $\ell^p$, $C(K)$, etc., desde el punto de vista de la reflexividad.

*Demostrar* que el espectro de un operador acotado es no vacío y clasificar sus valores espectrales.

*Conocer* la teoría de Riesz-Schauder y las alternativas de Fredholm en espacios de Banach, así como sus aplicaciones al estudio de las ecuaciones integrales.

## Prerrequisitos

La asignatura tratará de hacerse de la forma más autocontenida posible. Partimos de que el alumno ha cursado las asignaturas: *Álgebra Lineal y Geometría Euclídea* (Troncal, primer ciclo, 15 créditos), *Topología* (Troncal, primer ciclo, 6 créditos), *Análisis Matemático I y II* (Troncales, primer ciclo, 18 y 15 créditos) e *Introducción al Análisis Complejo* (Obligatoria, primer ciclo, 7,5 créditos). En cuanto a *Medida e Integración*, no presupondremos que el alumno está familiarizado con ella, por lo que se le entregará un resumen a principio de curso para que pueda manejar, casi en plan *axiomático*, la integral de Lebesgue, a la que se dedicarán dos o tres clases para dar una visión panorámica de la misma.

## Bibliografía seleccionada


☞ B. Cascales and J. M. Mira, *Análisis funcional*, ICE - Universidad de Murcia - DM, 2002.

☞ J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 96, Springer-Verlag, New York, 1985. MR 86h:46001.

☞ I. Gohberg and S. Goldberg, *Basic operator theory*, Birkhäuser, Boston, Mass., 1981. MR 83b:47001.

☞ B. V. Limaye, *Functional analysis*, Wiley Eastern Ltd., New Delhi, 1981. MR 83b:46001.

Capítulo 1

# Espacios de Hilbert

**TEMARIO**



De los primeros cursos de licenciatura es bien conocida la estructura euclídea del espacio numérico $\mathbb{R}^n$, así como la norma que, a partir de ella, se introduce en este espacio vectorial de dimensión finita.

El propósito de este capítulo es abordar el estudio de los espacios de dimensión infinita sobre el cuerpo de los números reales o complejos que estén provistos de un producto escalar, a partir del cual será definida una norma con relación a la que podremos hablar de convergencia y completitud en el espacio en cuestión. En otras palabras, empezamos a estudiar en este capítulo la teoría de los espacios de Hilbert, que es, dentro del contexto del Análisis Funcional, la más rica y fructífera, siendo a la vez la adecuada para enmarcar muy diversos problemas de la Matemáticas y la Física. Esta teoría de gran belleza intrínseca tiene numerosas aplicaciones a sistemas infinitos de ecuaciones lineales, ecuaciones integrales, problemas diferenciales, etc., algunas de las cuales desarrollaremos en capítulos posteriores.

## Lección 1.1 Espacios de Hilbert.

- El espacio real o complejo $n$-dimensional.

- El espacio $\ell^2$.
- Producto interno y sus propiedades: Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Norma asociada. Ley del Paralelogramo. Identidad de Polarización.
- Caracterización de las normas asociadas a productos internos.
- Espacios prehilbertianos y espacios de Hilbert. Ejemplos.

*Descripción.* Desde un punto de vista algebraico, métrico y geométrico, los espacios de Hilbert son la generalización más natural del espacio real o complejo $n$-dimensional $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, y así son presentados en esta lección y a lo largo del tema. Las propiedades básicas que relacionan un producto interno y su norma asociada permiten caracterizar los espacios normados (respectivamente, de Banach) que son prehilbertianos (respectivamente, de Hilbert), [Lim81, p. 179]:

**Teorema 1.1.1 (Jordan-Von Neumann, 1935).** *Dado un espacio normado $(X,\|\cdot\|)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i) Existe un producto escalar en $X$ tal que $\langle x,x\rangle = \|x\|^2$ para todo $x \in X$.*

*(ii) La norma $\|\cdot\|$ verifica la ley del paralelogramo*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \quad \textit{para todo } x,y \in X.$$

La lección se ilustra con distintos ejemplos de espacios normados que no son prehilbertianos ($\mathbb{R}^n$ dotado de $\|\cdot\|_1$), de espacios prehilbertianos que no son de Hilbert ($C([a,b])$ dotado de $\|\cdot\|_2$), y de espacios de Hilbert (el espacio de funciones de cuadrado integrable $L^2([a,b])$). Prestamos atención a otros ejemplos relevantes más sofisticados definidos como subespacios de espacios de funciones holomorfas. Si $\Omega$ es un abierto del plano complejo $\mathbb{C}$, denotamos por $\mathscr{H}(\Omega)$ el espacio de las funciones holomorfas en $\Omega$.

*Espacio de Hardy,* [Rud88, p. 383-385]**.** Si $D$ el disco unidad abierto del plano complejo, para $f$ en $\mathscr{H}(D)$ definimos

$$M_2(f;r) := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta\right)^{1/2}, \quad 0 < r < 1.$$

El espacio de Hardy es:

$$H^2(D) := \Big\{ f \in \mathscr{H}(D) : \quad \|f\|_{H_2} := \sup_{0<r<1} M_2(f;r) < \infty \Big\}.$$

*Espacio de Bergman,* [Hil77, p. 53-54] y [Con85, p. 5-6]. El espacio de Bergman en el abierto $\Omega$ se define como:

$$A^2(\Omega) := \left\{ f \in \mathscr{H}(\Omega) : \int\!\!\int_\Omega |f(x+iy)|^2 dxdy < \infty \right\},$$

y en él se considera la estructura hilbertiana inducida por $L^2(\Omega)$.

Probamos que $A^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert cuya topología es más fina que la topología de convergencia uniforme sobre compactos de $\Omega$. El espacio de Bergman se utiliza en las lecciones 1.6 y 1.8 para, respectivamente, sustituir globalmente en $\Omega$ los monomios $(z-a)^n$ que permiten desarrollar localmente en serie de potencias las funciones holomorfas por bases hilbertianas adecuadas, y encontrar *fórmulas integrales* que proporcionan isomorfismos conformes de abiertos simplemente conexos sobre discos. □

**Lección 1.2 Distancia de un punto a un subespacio.**

- Conjuntos ortogonales y ortonormales.
- Noción de mejor aproximación. Caracterización por ortogonalidad de las mejores aproximaciones sobre subespacios.
- Aproximación a un subespacio finito-dimensional: determinante de Gram.
- Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. Bases ortonormales en subespacios finito-dimensionales e interpretación de la aproximación y distancia.
- Ejemplos y aplicaciones a problemas de aproximación.

*Descripción.* Los principales resultados de la geometría de los espacios de Hilbert se derivan de la noción de ortogonalidad de vectores, la cual permite aproximar vectores sobre subespacios. En esta lección se estudian con detalle las *buenas* aproximaciones de un vector sobre un subespacio finito-dimensional. En este caso, el *determinante de Gram* de un conjunto de vectores $\{x_i\}_{i=1}^n$,

$$G(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

donde $a_{ij}=\langle x_j,x_i\rangle$, proporciona un método de cálculo directo para mejores aproximaciones y distancias a subespacios, [GG81, p. 13-21]:

**Teorema 1.2.1.** *Sean $H$ un espacio prehilbertiano, $M\subset H$ un subespacio de dimensión finita con base $\{x_i\}_{i=1}^n$ y $x$ un vector de $H$.*

*(i) El vector $y$ de mejor aproximación de $x$ a $M$ viene dado por*

$$y=\frac{-1}{G(x_1,x_2,\dots,x_n)}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \langle x,x_1\rangle\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \langle x,x_2\rangle\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \langle x,x_n\rangle\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0\end{vmatrix},$$

*donde $a_{ij}=\langle x_j,x_i\rangle$, $i,j=1,2,\dots,n$.*

*(ii) La distancia de x a M se expresa en la forma*

$$d(x,M) = \sqrt{\frac{G(x_1,x_2,\ldots,x_n,x)}{G(x_1,x_2,\ldots,x_n)}}.$$

Utilizando el determinante de Gram se obtiene, de forma elegante y no recurrente, el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, y usando ahora bases ortonormales en subespacios finito-dimensionales, se interpretan las nociones de mejor aproximación y distancia a un subespacio finito-dimensional. Estas propiedades de aproximación son particularmente importantes desde el punto de vista de las aplicaciones, por ejemplo, para la resolución de sistemas lineales sobredimensionados y ajustes polinómicos por mínimos cuadrados, [Lim81, p. 203]. Así, dados $k$ puntos (con $k$ grande) $t_1,\ldots,t_k$ en el intervalo $[a,b]$ y valores $y_1,\ldots,y_k$, léase: dada una tabla de la forma

| $t$ | $t_1$ | $t_2$ | ... | $t_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_k$ |

cuyos datos han sido obtenidos, por ejemplo, de forma experimental, la fórmula

$$P = \sum_{i=1}^{n} a_i t^i = \frac{-1}{G(1,t,t^2,\ldots,t^n)} \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & \cdots & A_{0n} & \langle Y,1\rangle \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} & \langle Y,t\rangle \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} & \langle Y,t^2\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n0} & A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} & \langle Y,t^n\rangle \\ 1 & t & t^2 & \cdots & t^n & 0 \end{vmatrix}$$

donde $A_{ij} = \langle t^j,t^i\rangle$ e $Y = (y_1,\ldots,y_k)$, proporciona el polinomio $P$ de grado $n$ ($n \leq k-1$) que minimiza la expresión de mínimos cuadrados $f(P) = \sum_{i=1}^{k} |y_i - P(t_i)|^2$. □

**Lección 1.3 El teorema de la proyección.**

- Aproximación sobre un conjunto cerrado y convexo.
- El teorema de la proyección. La propiedad de complementación en espacios de Hilbert. Proyecciones ortogonales.
- Aplicaciones. Extensión de operadores. Subconjuntos totales de un espacio de Hilbert.
- Ejemplos.

*Descripción.* La mejor aproximación de un vector sobre un subespacio finito-dimensional ha sido obtenida en la lección anterior por métodos elementales de álgebra lineal. Las propiedades de la norma asociada al producto escalar de un espacio de Hilbert permiten asegurar la existencia y unicidad de la mejor aproximación de un vector a un subconjunto convexo cerrado. En particular, para cada subespacio cerrado $M$ de una espacio de Hilbert $H$, hay bastantes elementos de $H$ que son ortogonales a $M$ y que, junto con $M$, generan todo $H$ (propiedad de complementación de los espacios de Hilbert). Este hecho diferencia los espacios de Hilbert de los espacios de Banach, y sobre él se apoya la fructífera teoría de los espacios de Hilbert:

**Teorema 1.3.1.** *Sean $H$ un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subespacio cerrado de $H$. Consideremos $P_M : H \longrightarrow H$ la aplicación que a cada $x \in H$ le hace corresponder la mejor aproximación de $x$ a $M$. Entonces:*

*(i)* *$P_M$ es una proyección lineal y el espacio $H$ se puede descomponer como suma directa algebraica de $M$ y $M^\perp$ (su ortogonal), siendo $P_M$ y $P_{M^\perp}$, precisamente, las proyecciones canónicas asociadas a dicha descomposición.*

*(ii)* $P_M(H) = M$, $\ker P_M = M^\perp$, $P_{M^\perp} = I - P_M$.

*(iii)* *Si $M \neq 0$, la proyección $P_M$ tiene norma $1$ y verifica $\langle P_M(x), y\rangle = \langle x, P_M(y)\rangle$, para $x, y \in H$. Otro tanto ocurre con $P_{M^\perp}$.*

*(iv)* *La suma directa $H = M \oplus M^\perp$ es topológica.*

*(v)* $M^{\perp\perp} = M$.

Como primeras aplicaciones de la existencia de proyecciones en espacios de Hilbert, caracterizamos los subconjuntos totales como aquéllos cuyo ortogonal es el cero, y mostramos que toda aplicación lineal y continua, definida en un subespacio de un espacio de Hilbert, admite una extensión lineal y continua a todo el espacio. Se pone de manifiesto mediante ejemplos que la hipótesis de completitud es esencial en el teorema de la proyección, [Lim81, p. 213-218]. □

**Lección 1.4 Bases hilbertianas.**

- Familias sumables.
- El espacio $\ell^2(A)$.
- Desigualdad de Bessel. El teorema de Riesz-Fisher.
- Conjuntos ortonormales maximales. Caracterización.
- Bases hilbertianas. Existencia. Dimensión hilbertiana.
- Caracterización de los espacios de Hilbert separables.
- Sumas hilbertianas.

*Descripción.* Empezamos por analizar el concepto de familia sumable de números reales, complejos, o en general en un espacio de Banach, [Cho66, p. 216-243]. Se pone de manifiesto que las series incondicionalmente convergentes son, precisamente, las familias sumables indicadas en los naturales, y se demuestra que, en los espacios de dimensión finita, series absolutamente convergentes e incondicionalmente convergentes son una misma cosa. Esto se hace con la ayuda del siguiente lema, [CM02, p. 51-56]:

**Lema 1.4.1.** *La norma euclídea $\|\cdot\|_2$ en $\mathbb{R}^n$ tiene la propiedad de que, para cada conjunto finito $\{z_j\}_{j\in J}$ en $X$, existe un subconjunto $S \subset J$ con la propiedad*

$$\frac{1}{2n\sqrt{n}} \sum_{j\in J} \|z_j\|_2 \le \left\| \sum_{j\in S} z_j \right\|_2. \tag{1.1}$$

Si la norma de un espacio de Banach $\left(X, \|\cdot\|\right)$ satisface una desigualdad del tipo 1.1, entonces $X$ es finito dimensional: véase [CM02, p. 55-56]. Tomando como punto de partida el estudio anterior, se introduce y analiza con comodidad el espacio de coordenadas $\ell^2(A)$; en la lección 4.4 se estudiarán los espacios de sucesiones (familias sumables) en general. La *transformación de Fourier* $\widehat{\ }$ que a cada elemento de un espacio de Hilbert $H$ le asocia sus proyecciones sobre los elementos de un conjunto ortonormal $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$, aplica de forma continua $H$ en $\ell^2(A)$, después de la desigualdad de Bessel. La completitud de $H$ garantiza que $\widehat{\ }: H \longrightarrow \ell^2(A)$ es sobreyectiva, teorema de Riesz-Fisher; cuando $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es maximal, $\widehat{\ }$ es una isometría.

**Teorema 1.4.2.** *Sean $H$ un espacio de Hilbert y $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un conjunto ortonormal en $H$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i)* $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *es un conjunto ortonormal maximal.*
*(ii)* *Si* $x \in H$ *es tal que* $\langle x, u_\alpha\rangle = 0$, *para todo* $\alpha \in A$, *entonces* $x = 0$.
*(iii)* $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *es un conjunto total.*
*(iv)* *La aplicación* $\widehat{\ }: H \longrightarrow \ell^2(A)$ *definida por* $\widehat{x} = (\langle x, u_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}$ *es inyectiva.*
*(v)* *Para cada* $x \in H$, *se tiene* $x = \sum_{\alpha\in A} \langle x, u_\alpha\rangle u_\alpha$ (desarrollo de Fourier).
*(vi)* *Para cada* $x, y \in H$, *se tiene* $\langle x, y\rangle = \sum_{\alpha\in A} \langle x, u_\alpha\rangle \overline{\langle y, u_\alpha\rangle}$.
*(vii)* *Para cada* $x \in H$, *se tiene* $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\langle x, u_\alpha\rangle|^2$ (identidad de Parseval).

La existencia de bases hilbertianas permite mirar cada espacio de Hilbert $H$ como un espacio de *coordenadas*, y en particular, cada espacio de Hilbert separable como el espacio de coordenadas $\mathbb{K}^n$ o $\ell^2$. En general, la dimensión hilbertiana nos permite clasificar los espacios de Hilbert. $\square$

**Lección 1.5 Series de Fourier: teoría en $L^2(\mathbb{T})$.**

- Polinomios trigonométricos. El espacio $L^2(\mathbb{T})$.
- Teorema de Weierstrass. Completitud del sistema trigonométrico en $L^2(\mathbb{T})$.
- Series de Fourier. Isomorfismo de $L^2(\mathbb{T})$ y $\ell^2(\mathbb{Z})$.
- Teorema de Müntz-Szasz.

*Descripción.* El estudio de las series de Fourier en el espacio de las funciones integrables sobre el círculo unidad, $L^1(\mathbb{T})$, requiere una amplia y compleja teoría. Sin embargo, para el subespacio $L^2(\mathbb{T})$ de $L^1(\mathbb{T})$, las técnicas de espacios de Hilbert permiten dar resultados satisfactorios en cuanto a la convergencia (en media cuadrática) de las series de Fourier y en cuanto a la existencia de funciones con coeficientes de Fourier prefijados (por supuesto en $\ell^2(\mathbb{Z})$). De hecho, la completitud del sistema trigonométrico en $L^2(\mathbb{T})$ junto con los resultados de la lección anterior, permiten obtener que la *transformada de Fourier* es un isomorfismo de $L^2(\mathbb{T})$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$. Para demostrar la completitud del sistema trigonométrico, establecemos los teoremas de aproximación de Korovkin y Weierstrass en el orden que sigue, cuya concatenación es espectacular, [Lim81, p. 20-21] y [Zei95, p. 205]:

**Teorema 1.5.1 (Korovkin, 1953).** *Consideremos las funciones $f_0$, $f_1$ y $f_2$ definidas en $[a,b]$ por*

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = t \quad y \quad f_2(t) = t^2,$$

*para cada $t \in [a,b]$. Para $n = 1,2,\ldots$, sea $P_n : C\big([a,b]\big) \longrightarrow C\big([a,b]\big)$ lineal. Supongamos que:*

*(i) Cada $P_n$ es positivo,* i.e., *$P_n(f) \geq 0$, para $n = 1,2,\ldots$, y cada $f \geq 0$ en $C\big([a,b]\big)$.*
*(ii) Para $m = 0,1,2$ se tiene $\lim_{n\to\infty} \big\|P_n(f_m) - f_m\big\|_\infty = 0$.*

*Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \big\|P_n(f) - f\big\|_\infty = 0,$$

*para cada $f \in C\big([a,b]\big)$.*

**Teorema 1.5.2 (Weierstrass, 1885).** *El conjunto de polinomios en una variable es denso en el espacio $\big(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty\big)$.*

**Teorema 1.5.3 (Weierstrass).** *Sea $f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua con $f(-\pi) = f(\pi)$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un polinomio trigonométrico real $P$ tal que*

$$\|f - P\|_\infty < \varepsilon.$$

Completamos el capítulo con la siguiente mejora del teorema de Weierstrass:

**Teorema 1.5.4 (Müntz-Szasz).** *Sea $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ una sucesión de enteros positivos y sea $X := \mathrm{lin}\{1,t^{\lambda_1},t^{\lambda_2},\ldots\}$ en $C\big([0,1]\big)$. Entonces $X$ es denso en $\big(C([0,1]),\|\cdot\|_\infty\big)$ si, y sólo si,*

$$\sum_n \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

Las técnicas de la lección 1.2 permiten demostrar una versión débil del teorema anterior con aproximación en media cuadrática (teorema de Müntz, 1914), [Lim81, p. 205-206]. A partir de aquí un ingenioso argumento y el teorema de Stone-Weierstrass nos permite obtener la aproximación en la norma del supremo. Alternativamente, se puede dar otra demostración obteniendo aproximación en norma del supremo, utilizando también teorema de Stone-Weierstrass, el teorema de Hahn-Banach y técnicas de funciones holomorfas, [Rud88, p. 355-358]. $\square$

**Lección 1.6 Bases hilbertianas en espacios de funciones.**

- Bases hilbertianas en $L^2([a,b])$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Polinomios ortogonales.
- Bases hilbertianas en $L^2\big([a,b]\times[a,b]\big)$.
- Bases hilbertianas en $A^2(\Omega)$ y su relación con los desarrollos en serie en $\mathscr{H}(\Omega)$.

*Descripción.* Nos ocupamos en esta lección del estudio de bases concretas en distintos espacios de Hilbert. En primer lugar, vemos cómo el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, utilizado con los monomios $\{1,t,t^2,\ldots,t^n,\ldots\}$, nos proporciona sucesiones de polinomios ortonormales: presentamos los polinomios de Legendre, Laguerre, Hermite y Tchebychev. Estudiamos bases formadas por polinomios ortonormales en los espacios $L^2([a,b])$. Utilizamos los polinomios ortonormales para mejorar la aproximación de las fórmulas de cuadratura Gaussiana para cálculo de integrales y, en combinación con el teorema de Weierstrass 1.5.2, demostramos el teorema de Stieltjes, el cual proporciona que las fórmulas de cuadratura Gaussiana convergen a la integral:

**Teorema 1.6.1 (Gauss).** *Sea $p$ un peso en $[a,b]$ y sea $\{P_0,P_1,\ldots,P_n,\ldots\}$ la sucesión de polinomios ortonormales asociados a $p$ en $[a,b]$. Fijado $n\in\mathbb{N}$, sean $t_1<t_2<\ldots<t_n$ puntos interiores a $[a,b]$ y supongamos que la fórmula*

$$\int_a^b f(t)p(t)dt \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k) \tag{1.2}$$

*es exacta para polinomios de grado menor que $n$. Entonces, la fórmula es exacta para polinomios de grado menor que $2n$ si, y sólo si, $\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ son los ceros del polinomio $P_n$.*

**Teorema 1.6.2 (Stieltjes).** *Sea $p$ un peso en $[a,b]$ y sea $\{P_0,P_1,\ldots,P_n,\ldots\}$ la sucesión de polinomios ortonormales asociados a $p$ en $[a,b]$. Para cada $n=1,2,\ldots$, sean $t_{n1}<t_{n2}<\ldots<t_{nn}$ los ceros de $P_n$ y sean $A_{n1}, A_{n2},\ldots, A_{nn}$ los correspondientes coeficientes en la fórmula de cuadratura gaussiana* (1.2). *Entonces, para cada función $f\in C([a,b])$ se tiene*

$$\int_a^b f(t)p(t)dt = \lim_n \sum_{k=1}^{n} A_{nk} f(t_{nk}).$$

Vemos también cómo, al multiplicar tensorialmente dos bases hilbertianas de $L^2([a,b])$, se obtiene una base hilbertiana para $L^2\big([a,b]\times[a,b]\big)$, resultado que ofrece una ayuda notable para interpretar operadores integrales en $L^2([a,b])$ como operadores matriciales y deducir fácilmente propiedades de compacidad para ellos, véase la lección 2.5. A continuación estudiamos bases hilbertianas en el espacio de funciones holomorfas $A^2(\Omega)$. Ahora, el desarrollo en serie de Fourier de una función de $A^2(\Omega)$ sustituye (en todo su sentido) al desarrollo en serie de potencias de una función holomorfa en un disco, [Hil77, p. 335-337] y [CM02, p. 70-74]:

**Teorema 1.6.3.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $\{w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\}$ una base hilbertiana de $A^2(\Omega)$. Entonces, para cada $f \in A^2(\Omega)$, el desarrollo en serie de Fourier*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, w_n \rangle w_n$$

*converge uniformemente sobre compactos de $\Omega$.*

También nos ocupamos de la construcción de bases concretas en $A^2(\Omega)$, lo que finalmente depende de la complejidad de $\Omega$:

*Discos:* Para un disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, un cálculo directo es suficiente para establecer que los polinomios mónicos normalizados forman un sistema ortonormal completo en $A^2(D)$.

*Abiertos simplemente conexos:* Para $\Omega$ un abierto simplemente conexo distinto de $\mathbb{C}$, el teorema de representación conforme de Riemann y el teorema del cambio de variable para la integral en $\mathbb{R}^2$ permiten construir, a partir de la base hilbertiana del punto anterior para $A^2(D)$, una base hilbertiana de $A^2(\Omega)$.

*Dominios acotados:* Para un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{C}$, el teorema de la proyección permite construir un sistema ortonormal completo en $A^2(\Omega)$. $\square$

**Lección 1.7 El teorema de representación de Riesz.**

- Formas lineales continuas en un espacio de Hilbert. El espacio dual.
- El teorema de representación de Riesz. Ejemplos y contraejemplos.
- Antisomorfismo con el dual. Bidual. Reflexividad.
- Teorema de Hahn-Banach. Unicidad de las extensiones.
- Topología débil de un espacio de Hilbert.

*Descripción.* El teorema de la proyección, junto con un sencillo argumento de álgebra lineal, permite obtener que toda forma lineal continua en un espacio de Hilbert está determinada unívocamente por un vector del espacio a través del producto escalar [Lim81, p. 216-224]:

**Teorema 1.7.1 (Riesz-Fréchet, 1907).** *Sean $H$ un espacio de Hilbert y $f : H \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i) La forma lineal $f$ es continua.*

*(ii) Existe un único $y \in H$ tal que $f(x) = \langle x, y \rangle$ para todo $x \in H$, siendo además $\|f\| = \|y\|$.*

La completitud es esencial en el teorema anterior, como ponen de manifiesto sencillos ejemplos. Era opinión del propio Riesz, y es opinión de numerosos autores, que casi toda la teoría de espacios de Hilbert puede basarse en este teorema de representación: en la lección 1.9 demostramos que el teorema de Riesz y el teorema de la proyección (para subespacios cerrados) son equivalentes. Las consecuencias de este resultado son numerosas y aparecen por toda la teoría de espacios de Hilbert y allá donde ésta se aplica. En esta lección se dan unas primeras aplicaciones que sorprenden por su sencillez cuando se comparan con sus extensiones a espacios de Banach: la propiedad de extensión de Hahn-Banach y el carácter débilmente sucesionalmente compacto de los acotados de los espacios de Hilbert. □

**Lección 1.8 Aplicaciones del teorema de Riesz.**

- El teorema de Radon-Nikodým.
- El núcleo de Aronszajn-Bergman. El núcleo de Bergman en $A^2(\Omega)$ y el teorema de representación conforme de Riemann.

*Descripción.* La importancia del teorema de Riesz reside tanto en su profundidad como en su aplicabilidad. Aplicamos, en primer lugar, el teorema de Riesz para dar una prueba funcional del teorema de Radon-Nikodým, [Yos80, p. 93] y [Wei74, p. 216]. En segundo lugar, lo utilizamos para estudiar la existencia de núcleos en espacios de Hilbert de funciones, [Yos80, p. 96-98]. La existencia de un núcleo $K_\Omega : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ en $A^2(\Omega)$ (núcleo de Bergman) permite, cuando $\Omega$ es simplemente conexo, dar una fórmula integral para una biyección conforme de $\Omega$ sobre un disco:

**Teorema 1.8.1.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y acotado y fijemos $z_0 \in \Omega$. Entonces, la función*

$$f(z) := \frac{1}{K_\Omega(z_0,z_0)} \int_{z_0}^{z} K_\Omega(w,z_0)\,dw, \quad \textit{para } z \in \Omega,$$

*es la única biyección conforme de $\Omega$ sobre el disco $D(0,\rho)$, de forma que $\rho = 1/\sqrt{\pi K_\Omega(z_0,z_0)}$, $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) = 1$.* □

**Lección 1.9 Problemas variacionales cuadráticos.**

- Problemas variacionales cuadráticos. Equivalencia con el teorema de Riesz y el teorema de la proyección para subespacios cerrados.
- Principio de Dirichlet. Conexión entre problemas variacionales y problemas frontera.
- Derivadas generalizadas y espacios de Sobolev.
- Desigualdad de Poincaré-Friedrichs.
- Principio de Dirichlet generalizado.
- El método de Ritz.

*Descripción.* Partimos aquí de la siguiente consecuencia del teorema de representación de Riesz, [Zei95, p. 120-142].

**Teorema 1.9.1 (Teorema principal de los problemas variacionales cuadráticos).** *Sean $H$ un espacio de Hilbert real y $B$ una forma bilineal simétrica, acotada y fuertemente positiva, definida en $H$. Sea $b$ una forma lineal continua en $H$ y sea $F : H \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante*

$$F(x) := \frac{1}{2}B(x,x) - b(x). \tag{1.3}$$

*Entonces:*

*(i) Es condición necesaria y suficiente para que $F$ alcance su mínimo en $w \in H$ (*problema variacional*) que se verifique la siguiente* ecuación variacional*:*

$$B(w,y) = b(y) \quad \textit{para todo } y \in H. \tag{1.4}$$

*(ii) La función real $F(x)$ alcanza un mínimo absoluto en $H$ que, además, es único.*

El teorema anterior es de hecho equivalente al teorema de representación de Riesz (lección 1.7) y al teorema de existencia de mejores aproximaciones sobre subespacios cerrados (lección 1.3). Se introduce el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, y su subespacio $H_0^1(\Omega)$, que utilizamos para definir el concepto de función que se anula en la frontera de $\Omega$ en sentido generalizado. La desigualdad de Poincaré-Friedrichs es la herramienta intermedia que necesitamos para demostrar el principio de Dirichlet.

**Lema 1.9.2 (Desigualdad de Poincaré-Friedrichs).** *Si $\Omega$ es un abierto no vacío y acotado de $\mathbb{R}^n$, entonces existe $C > 0$ tal que*

$$C\int_\Omega u^2(x)\,dx \le \int_\Omega \sum_{j=1}^n (\partial_j u(x))^2\,dx,$$

*para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.*

**Teorema 1.9.3 (Principio de Dirichlet).** *Sea $\Omega$ un abierto acotado no vacío de $\mathbb{R}^n$ y supongamos dadas las funciones $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^1(\Omega)$. Entonces:*

*(i) La función*

$$F(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{j=1}^n (\partial_j u(x))^2\,dx - \int_\Omega f(x)u(x)\,dx,$$

*para $u \in H^1(\Omega)$ y $u = g$ en $\partial\Omega$ en sentido generalizado, tiene un único punto de mínimo $u = u_0$.*

*(ii) Dicho punto $u_0$ es también la única solución, $u = u_0$, del siguiente problema generalizado de valores frontera:*

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^n \partial_j u(x)\partial_j v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx$$

*para todo* $v \in H^1_{00}(\Omega)$, *con la condición* $u = g$ *en* $\partial\Omega$ *en sentido generalizado. Y también es la única solución del problema de valores frontera para la ecuación de Poisson*

$$-\triangle u(x) = f(x),$$

*con* $u = g$ *en* $\partial\Omega$ *en sentido generalizado.*

La lección termina con una descripción del *método de Ritz* para resolver asintóticamente el problema variacional, que es la base de algunos métodos numéricos para la resolución de ciertas ecuaciones en derivadas parciales.

**Teorema 1.9.4 (Método de Ritz).** *Sea* $H$ *un espacio de Hilbert real y sea* $(Y_n)_n$ *una sucesión de subespacios finito dimensionales tales que, para cada* $x \in H$, *se verifique* $\lim_n d(x, Y_n) = 0$. *Sean* $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *una forma bilineal acotada simétrica (con constante* $M$*) fuertemente positiva (con constante* $c$*) y* $b$ *una forma lineal continua definida en* $H$. *Entonces:*

*(i) La única solución* $w$ *para el problema variacional asociado a* (1.3) *(única solución de la ecuación variacional* (1.4)*) satisface la desigualdad*

$$\|w\| \leq c^{-1}\|b\|.$$

*(ii) El problema variacional (de Ritz) asociado a* (1.3) *sobre el espacio* $Y_n$ *tiene una única solución* $w_n \in Y_n$, *que es también solución de la correspondiente ecuación variacional (de Ritz) asociada a* (1.4) *en* $Y_n$.

*(iii) La sucesión* $(w_n)_n$ *converge a* $w$ *en* $H$ *con la siguiente estimación de la convergencia:*

$$\|w_n - w\| \leq c^{-1} M d(w, Y_n).$$

*(iv) Si se conoce una cota inferior* $\beta$ *para el problema variacional original de mínimo (es decir, si* $\beta \leq F(w)$*), entonces la fórmula*

$$\frac{1}{2} c \|w_n - w\|^2 \leq F(w_n) - \beta$$

*proporciona una estimación del error que se comete al sustituir* $w$ *por* $w_n$. $\square$

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Cho66], [Lim81], [Rud88], [Hil77], [Con85], [GG81], [CM02], [Zei95], [Yos80], [Wei74].

Capítulo 2

# Operadores lineales acotados en espacios de Hilbert

**TEMARIO**



Habiendo discutido la estructura geométrica de un espacio de Hilbert en el capítulo anterior, en el presente estudiamos con detalle las aplicaciones lineales continuas de $H$ en $H$. Estas funciones son descritas por matrices infinitas, de la misma forma que las transformaciones lineales en $\mathbb{C}^n$ son representadas por matrices finitas. De este modo, y tras pasar a coordenadas respecto a una base Hilbertiana, el estudio de una ecuación de la forma $Tx = y$, donde $x,y \in H$ y $T \in \mathscr{L}(H)$, es equivalente al estudio de un sistema infinito de ecuaciones lineales. Damos el test de Schur para decidir si una matriz infinita determina un operador acotado en $\ell^2$. Estudiamos el método iterativo de invertibilidad de operadores, que aplicamos al estudio de ecuaciones de la forma $x - Tx = y$. Después, introducimos la noción de funcional sesquilineal acotado, que nos permite definir el adjunto $T^*$ de un operador $T$ en $H$, y estudiamos clases importantes de operadores (autoadjuntos, normales, unitarios, compactos), que serán las que nos aparezcan en las aplicaciones a sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones integrales.

**Lección 2.1 Operadores lineales acotados en espacios de Hilbert.**

- Operadores lineales acotados. Norma. Continuidad. Ejemplos y estimación de las normas.
- El espacio de Banach de los operadores lineales acotados.
- Representaciones matriciales. Operador asociado a una matriz infinita. Test de Schur.
- Operadores de rango finito. Caracterización. Ejemplos.

*Descripción.* La existencia de conjuntos ortonormales completos en los espacios de Hilbert permite describir los operadores lineales entre éstos a través de matrices infinitas, de la misma forma que las aplicaciones lineales en $\mathbb{C}^n$ son representadas por matrices finitas.

**Proposición 2.1.1.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita con base ortonormal $\{e_n\}_n$ y sea $T \in \mathscr{L}(H)$. Entonces, para todo $x \in H$, se tiene*

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \langle Te_j, e_k \rangle e_k.$$

*Es decir, $T$ admite una representación matricial de la forma*

$$\begin{pmatrix} \langle Te_1, e_1 \rangle & \langle Te_2, e_1 \rangle & \cdots & \langle Te_n, e_1 \rangle & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle Te_1, e_n \rangle & \langle Te_2, e_n \rangle & \cdots & \langle Te_n, e_n \rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Matrices infinitas dan lugar a operadores entre espacios de Hilbert, [GG81, p. 55-63].

**Proposición 2.1.2 (Test de Schur, [Lim81, p. 229]).** *Sea $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ una matriz infinita, con $a_{ij} \in \mathbb{K}$, que cumple la siguiente condición: existen constantes $C_1$ y $C_2$ tales que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq C_1, \text{ para todo } i; \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq C_2, \text{ para todo } j.$$

*Sean $H_1, H_2$ espacios de Hilbert separables de dimensión infinita con bases ortonormales $\{u_n\}_n$ y $\{v_n\}_n$, respectivamente. Entonces la fórmula*

$$Tx = T\left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, u_i \rangle u_i\right) := \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \langle x, u_i \rangle\right) v_j$$

*define un operador acotado de $H_1$ en $H_2$ con*

$$\|T\| \leq (C_1 C_2)^{1/2}.$$

La lección es, por tanto, una pequeña introducción a la teoría de matrices infinitas. $\square$

**Lección 2.2 Invertibilidad de operadores.**

- Operadores invertibles.
- Invertibilidad de $(I - K)$, con $K$ de rango finito. Aplicación a las ecuaciones integrales.

- Inversión de operadores por el método iterativo. El subconjunto abierto de los operadores invertibles.
- Sistemas infinitos de ecuaciones lineales. Aproximación por sistemas finitos.
- Aplicación a las ecuaciones integrales.

*Descripción.* Uno de los problemas fundamentales en la teoría de operadores es resolver, si es posible, la ecuación $Tx = y$, donde $T$ es un operador lineal acotado e $y$ es un vector dado. En esta lección consideramos este problema para algunas clases de operadores simples, pero a la vez importantes. La invertibilidad de los operadores involucrados resulta esencial en estas cuestiones. El método empleado para invertir un operador resulta, en ciertos casos, de particular interés: aplicación del método iterativo de inversión al estudio de sistemas infinitos de ecuaciones lineales y al estudio de ciertos tipos de ecuaciones integrales. Para los sistemas infinitos se obtienen soluciones aproximadas mediante las soluciones de los sistemas finitos truncados, [GG81, p. 66-73].

**Proposición 2.2.1.** *Dada la matriz $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ donde $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 < 1$, el sistema*

$$x_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j = y_i, \quad i = 1,2,\ldots,$$

*tiene una única solución $z = (z_1,z_2,\ldots)$ para cada $y = (y_1,y_2,\ldots) \in \ell^2$. Además, los sistemas truncados*

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = y_i, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

*tienen una única solución $z^{(n)} = (z_1^{(n)},z_2^{(n)},\ldots,z_n^{(n)})$, y la sucesión $J_n z^{(n)}$ tiene por límite $z$ en $\ell^2$, siendo $J_n$ la inclusión canónica de $\mathbb{K}^n$ en las $n$ primeras coordenadas de $\ell^2$.*

Para ciertas ecuaciones integrales, sus soluciones se expresan mediante núcleos integrales, [GG81, p. 74-75].

**Proposición 2.2.2.** *Sea $k \in L^2\big([a,b]\times[a,b]\big)$ con $\|k\|_2 < 1$. Entonces, para cada $g \in L^2([a,b])$, la ecuación integral*

$$f(t) - \int_a^b k(t,s) f(s)\, ds = g(t)$$

*tiene una única solución que es de la forma*

$$g(t) + \int_a^b \tilde{k}(t,s) g(s)\, ds,$$

*donde $\tilde{k} \in L^2\big([a,b]\times[a,b]\big)$.* □

**Lección 2.3 Funcionales sesquilineales y operadores adjuntos.**

- Funcionales sesquilineales. Representación de funcionales sesquilineales en un espacio de Hilbert.
- El teorema de Lax-Milgram. Producto escalar y topología de un espacio de Hilbert.
- Adjunto de un operador entre espacios de Hilbert. Ejemplos. Representación matricial.
- Propiedades de los operadores adjuntos. Rango y núcleo.

*Descripción.* Como consecuencia del teorema de representación de Riesz, toda forma sesquilineal $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ acotada, en un espacio de Hilbert tiene que ser, necesariamente, de la forma $B(x,y) = \langle x, Ty \rangle$, $x,y \in H$, donde $T \in \mathscr{L}(H)$, [BN66, p. 368-372] y [Lim81, p. 231]. Cuando $B$ es además *fuertemente positiva* se tiene, [Yos80, p. 92]:

**Teorema 2.3.1 (Lax-Milgram, 1954).** *Sean $H$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ y $B$ una forma sesquilineal en $H$ acotada y fuertemente positiva. Entonces existe un isomorfismo de espacios de Hilbert $T : H \longrightarrow H$, unívocamente determinado, tal que*

$$B(x,y) = \langle x, Ty \rangle \quad \textit{para todo } \ x,y \in H.$$

En particular, las topologías asociadas a dos estructuras hilbertianas $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $H$ coinciden si, y sólo si, existe un isomorfismo de espacios de Banach $T : (H, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (H, \|\cdot\|)$ de forma que $\langle x,y \rangle_1 = \langle x, Ty \rangle$ para cada $x,y \in H$ (la topología determina, *salvo isomorfismos*, el producto escalar).

La existencia de adjuntos de operadores lineales acotados se presenta como un caso particular de la representación de funcionales sesquilineales: estos operadores adjuntos son la contrapartida infinito-dimensional del concepto de matriz adjunta. Frecuentemente, se puede ganar información para un operador conociendo su adjunto, con el cual puede ser más simple trabajar. El estudio de las propiedades de los operadores adjuntos (como por ejemplo, $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$, $\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$, $(\ker T)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T^*}$, $(\ker T^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T}$) serán de utilidad para establecer el teorema espectral, [GG81, p. 77-80], véase la lección 3.3. □

**Lección 2.4 Algunas clases especiales de operadores.**

- Operadores autoadjuntos. Propiedades y ejemplos. Proyecciones ortogonales.
- Operadores normales. Propiedades y ejemplos.
- Isometrías y transformaciones unitarias. Propiedades y ejemplos.
- La transformación de Fourier-Plancherel.

*Descripción.* Desde el punto de vista de la operación de tomar adjuntos, estudiada en la lección anterior, hay algunas clases de operadores en un espacio de Hilbert que tienen un buen comportamiento: los operadores autoadjuntos, los operadores normales y las transformaciones unitarias.

Estas buenas propiedades serán fundamentales a la hora de obtener expresiones sencillas (descomposiciones espectrales) para los operadores de estas clases en lecciones posteriores. Se estudian las transformaciones unitarias (las isometrías sobreyectivas de un Hilbert en sí mismo), prestando atención especial a la transformación de Fourier-Plancherel que extiende, desde $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$, la transformación de Fourier, [Lim81, p. 238-247] y [GG81, p. 80-82 y 184-186].

**Teorema 2.4.1 (Plancherel, 1933).** *Para $x \in L^2(\mathbb{R})$,*

$$y(u) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{du} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ius}-1}{-is} x(s)\, ds$$

*define una función $y$ para casi todo $u \in \mathbb{R}$. Se tiene que $y \in L^2(\mathbb{R})$, y el operador definido por $U(x) = y$ es una transformación unitaria cuyo inverso $V(y) = x$ viene dado por*

$$x(u) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{du} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ius}-1}{-is} y(s)\, ds.$$

*Además, si $x \in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$, entonces $U(x)(u) = \widehat{x}(u)$ para casi todo $u \in \mathbb{R}$, siendo $\widehat{x}$ la transformada de Fourier de $x$,*

$$\hat{x}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-ius} ds, \; u \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

**Lección 2.5 Operadores compactos.**

- Operadores compactos. Caracterización. Primeros ejemplos.
- Propiedades de los operadores compactos: operaciones, rango, el subespacio cerrado de los operadores compactos.
- Operadores compactos como límites de operadores de rango finito.
- Operadores compactos definidos por matrices. Operadores integrales.
- Adjunto de un operador compacto.

*Descripción.* Una clase muy importante de operadores lineales acotados que aparece en el estudio de las ecuaciones integrales es la clase de los operadores compactos. En esta lección se estudian algunas propiedades y ejemplos de operadores compactos que se utilizarán en lecciones posteriores, y que a su vez son importantes por sí mismas. Por ejemplo, de la existencia de proyecciones en un espacio de Hilbert se obtiene que un operador compacto con valores en un tal espacio es el límite (en la norma de operadores) de una sucesión de operadores de rango finito, *i.e.*, *todo espacio de Hilbert tiene la propiedad de la aproximación* (véase la lección 6.4 para el caso de espacios de Banach). El ejemplo por antonomasia de un operador compacto $T$ entre espacios de Hilbert (separables) $H_1$ y $H_2$ viene dado por una expresión

$$Tx := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x, e_n \rangle f_n,$$

donde $\{e_n\}_n$ es una base Hilbertiana de $H_1$, $\{f_n\}_n$ un conjunto ortonormal de $H_2$ y $(a_n)_n$ es una sucesión nula en el cuerpo. Posteriormente, el teorema espectral (véase la lección 3.6) permitirá demostrar que los operadores compactos son, precisamente, los que admiten una expresión como la de arriba. Utilizando el hecho de que al multiplicar tensorialmente dos bases hilbertianas de $L^2([a,b])$ se obtiene una base hilbertiana de $L^2\big([a,b]\times[a,b]\big)$, se demuestra fácilmente el siguiente resultado, [GG81, p. 83-84] y [Con85, p. 41-46]:

**Teorema 2.5.1.** *Si $k \in L^2\big([a,b]\times[a,b]\big)$, entonces el operador integral $K : L^2([a,b]) \longrightarrow L^2([a,b])$ (con núcleo k) dado por la fórmula*

$$Kf(t) := \int_a^b k(t,s)f(s)\,ds$$

*es un operador compacto.*

El hecho de que para un operador $T$ se dé la igualdad $\|T\| = \|T^*\|$, junto con que el límite de operadores de rango finito es un operador compacto, permite dar una prueba sencilla de que $T$ es compacto si, y sólo si, $T^*$ lo es. Esta equivalencia será analizada en general para operadores entre espacios de Banach en la lección 6.4, donde la prueba es completamente distinta: teorema de Schauder. $\square$

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[BN66], [GG81], [Con85], [Lim81], [Yos80].

Capítulo 3

# Teoría espectral elemental en espacios de Hilbert

**TEMARIO**



En este capítulo introducimos al alumno en la teoría espectral elemental para operadores autoadjuntos (normales) en espacios de Hilbert. Los operadores compactos autoadjuntos tienen un interés especial, y no sólo porque se puede tener información más precisa sobre su espectro que en el caso de operadores compactos generales, sino también porque su teoría general se aplica inmediatamente en las ecuaciones integrales de Fredholm con núcleo hermitiano y, en particular, al problema de Sturm-Liouville, que se ha elegido como una ilustración especialmente interesante de la potencia de los métodos del Análisis Funcional.

La teoría espectral general es desarrollada en la asignatura de *Álgebras de Banach*, que es una asignatura optativa de 6 créditos impartida en el Segundo Ciclo de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Murcia.

**Lección 3.1 Valores propios y subespacios propios.**

- Subespacios invariantes. Ejemplos. Subespacios invariantes para un operador y su adjunto.
- Valores, vectores y subespacios propios de un operador.
- Propiedades de los valores y subespacios propios de operadores autoadjuntos, normales, unitarios y compactos.

*Descripción.* Algunas veces, las propiedades de un operador en un espacio de Hilbert pueden ser determinadas más fácilmente considerando éste restringido a ciertos subespacios donde se expresa de forma simple. De especial relevancia son los subespacios en los que el operador actúa como una homotecia (subespacios propios), los cuales desempeñan un papel central en la teoría espectral.

En esta lección introducimos los conceptos de valor, vector y subespacio propio de un operador, estudiando las primeras propiedades de éstos para los operadores de las clases especiales introducidas en el capítulo anterior: autoadjuntos, normales, etc. Prestamos atención a los siguientes resultados, que serán las herramientas a utilizar en la demostración del teorema espectral que se prueba en lecciones posteriores, [Con85, p. 44-46], [GG81, p. 88-89] y [Sch67, p. 66-69]:

**Proposición 3.1.1.** *Sean $H$ un espacio de Hilbert y $T \in \mathscr{L}(H)$ un operador normal. Entonces:*

*(i)* *Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene* $\ker(T-\lambda I) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)$.

*(ii)* *Si $\lambda \neq \mu$, entonces* $\ker(T-\lambda I) \perp \ker(T-\mu I)$.

*(iii)* $\ker(T-\lambda I)$ *y* $(\ker(T-\lambda I))^{\perp}$ *son invariantes por $T$.*

**Teorema 3.1.2.** *Sean $H$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ y $T \in \mathscr{L}(H)$ un operador compacto.*

*(i)* *Si $\lambda \neq 0$, entonces* $\ker(T-\lambda I)$ *es de dimensión finita (teorema de Riesz).*

*(ii)* *Si $T$ es, además, normal, entonces $\sigma_p(T)$ (espectro puntual) es un conjunto finito o numerable. Caso de ser numerable, $0$ es su único punto de acumulación.* □

**Lección 3.2 Existencia de valores y vectores propios.**

- Valores y vectores propios de operadores de rango finito.
- Ejemplos. Operadores compactos y operadores autoadjuntos sin valores propios.
- Norma de un operador autoadjunto. Norma de la forma cuadrática asociada.
- Existencia de valores propios para operadores compactos autoadjuntos.
- Existencia de valores propios para operadores compactos normales.

*Descripción.* De álgebra es conocido que todo operador lineal $T$ en un espacio de Hilbert $H$ (complejo) finito-dimensional tiene un valor propio (teorema fundamental del álgebra), y que si $T$ es autoadjunto ($H$ real o complejo), entonces $T$ tiene un valor propio cuyo módulo es igual a la norma de $T$. En general, para espacios de Hilbert de dimensión infinita hay operadores lineales acotados sin valores propios, [Con85, p. 44] y [GG81, p. 108-113].

El propósito fundamental de esta lección es establecer que todo operador compacto y autoadjunto en un espacio de Hilbert cualquiera tiene, al menos, un valor propio, [GG81, p. 112]:

**Teorema 3.2.1.** *Si $T$ es un operador compacto autoadjunto en un espacio de Hilbert $H$, entonces $\|T\|$ o $-\|T\|$ es un valor propio de $T$.*

De hecho, un operador compacto autoadjunto (o, más en general, compacto normal) tiene suficientes valores (vectores) propios como para poder ser expresado como una suma de operadores simples (descomposición espectral). □

**Lección 3.3 Teoría espectral para operadores compactos autoadjuntos.**

- Diagonalización de un operador.
- El teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos.
- Sistemas básicos de valores y vectores propios.
- Descomposición de un espacio de Hilbert asociada a la descomposición espectral de un operador compacto autoadjunto.
- Soluciones de la ecuación $\lambda x - Tx = y$, para $T$ compacto autoadjunto.

*Descripción.* Haciendo uso del resultado establecido en la lección anterior, que asegura que un operador compacto autoadjunto $T$ en un espacio de Hilbert $H$ tiene un valor propio de módulo la norma del operador, y teniendo en cuenta que el suplementario ortogonal de un subespacio invariante para $T$ es, de nuevo, un subespacio invariante para $T$, un argumento de inducción permite construir una base hilbertiana para $H$ que está formada por vectores propios de $T$. La extensión de los resultados del caso finito-dimensional es completa: $T$ se expresa como un operador diagonal en esta base, y $H$ es la suma hilbertiana de los subespacios propios de $T$, [GG81, p. 113-121].

**Teorema 3.3.1 (Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos).** *Sean $H$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ y $T \in \mathscr{L}(H)$ un operador compacto autoadjunto.*

*(i) El conjunto $\sigma_p(T) \setminus \{0\}$, formado por los valores propios no nulos de $T$, es finito o numerable, y el espacio $H$ puede expresarse como suma directa hilbertiana de* $\ker T$ *y de los subespacios propios correspondientes a los valores propios no nulos de $T$, es decir,*

$$H = \ker T \oplus \left[ \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} \ker(T - \lambda I) \right].$$

*(ii) Si $P_\lambda$ es la proyección ortogonal sobre el subespacio* $\ker(T - \lambda I)$, *entonces*

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda P_\lambda$$

*en el espacio $\mathscr{L}(H)$, donde la igualdad anterior debe entenderse en el sentido de que la familia $(\lambda P_\lambda)_{\lambda \in \sigma_p(T)}$ es sumable con suma $T$.*

*(iii) Se tiene que*

$$\overline{\operatorname{Im} T} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} \ker(T - \lambda I).$$

*(iv) Existen un conjunto contable (finito o numerable) $J$, una colección $\{e_n\}_{n \in J}$ de vectores ortonormales, que constituyen una base de $\overline{\operatorname{Im} T}$, y una colección de escalares $\{\mu_n\}_{n \in J}$ tales que, para cada $x \in H$, es*

$$Tx = \sum_{n \in J} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n,$$

*donde la igualdad anterior debe entenderse en el sentido de que* $(\mu_n\langle x,e_n\rangle e_n)_{n\in J}$ *es sumable con suma* $Tx$*. Además, para cada* $n\in J$, $\mu_n\in\sigma_p(T)\setminus\{0\}$ *y cada* $\lambda\in\sigma_p(T)\setminus\{0\}$ *aparece en la colección* $\{\mu_n\}_{n\in J}$ *un número finito de veces, cuyo valor es la dimensión de* $\ker(T-\lambda I)$.

(v) *Cada* $x\in H$ *admite una representación en la forma*

$$x=P_0x+\sum_{n\in J}\langle x,e_n\rangle e_n,$$

*donde* $P_0$ *es la proyección ortogonal de* $H$ *sobre* $\ker\ T$.

Como una aplicación notable de la expresión diagonal de un operador compacto autoadjunto $T$ cabe destacar la sencilla resolución de las ecuaciones $\lambda x-Tx=y$, lo que es de interés para el estudio de ciertas ecuaciones integrales.

**Teorema 3.3.2 (Alternativa de Fredholm).** *Sean* $H$ *un espacio de Hilbert sobre* $\mathbb{K}$ *y* $T\in\mathscr{L}(H)$ *un operador compacto autoadjunto. Sea* $\{e_n\}_{n\in J}$ *una base de* $\overline{\operatorname{Im}T}$ *tal que* $T$ *se expresa en la forma*

$$Tx=\sum_{n\in J}\mu_n\langle x,e_n\rangle e_n.$$

(i) *Si* $\lambda\notin\sigma_p(T)\cup\{0\}$*, entonces, para cada* $y\in H$*, la ecuación* $(\lambda I-T)x=y$ *tiene una única solución que viene dada por la fórmula*

$$\frac{1}{\lambda}\Big(y+\sum_{n\in J}\frac{\mu_n}{\lambda-\mu_n}\langle y,e_n\rangle e_n\Big).$$

(ii) *Si* $\lambda\in\sigma_p(T)\setminus\{0\}$*, entonces la ecuación* $(\lambda I-T)x=y$ *tiene solución si, y sólo si, el vector* $y\in\ker(\lambda I-T)^{\perp}$*, siendo la solución general, en este caso,*

$$x=\frac{1}{\lambda}\Big(y+\sum_{\mu_{n\in J_\lambda}}\frac{\mu_n}{\lambda-\mu_n}\langle y,e_n\rangle e_n\Big)+z,$$

*donde* $z\in\ker(\lambda I-T)$ *es arbitrario y* $J_\lambda=\{n\in J:\mu_n\neq\lambda\}$.

(iii) *La ecuación* $Tx=y$ *tiene solución si, y sólo si,*

$$y\in(\ker T)^{\perp}\qquad y\qquad \sum_{n\in J}|\langle y,e_n\rangle|^2\frac{1}{|\mu_n|^2}<\infty.$$

*En este caso, las soluciones vienen dadas por*

$$x=z+\sum_{n\in J}\frac{1}{\mu_n}\langle y,e_n\rangle e_n,$$

*donde* $z\in\ker T$ *es arbitrario.* □

**Lección 3.4 Teoría espectral para operadores integrales.**

- Ecuación integral de Fredholm de núcleo simétrico.
- Teorema de Hilbert-Schmidt. Aplicación: convergencia de las series solución de una ecuación de Fredholm.

*Descripción.* La teoría desarrollada en la lección anterior tiene una aplicación natural al estudio de las ecuaciones integrales de núcleo simétrico. Usando las fórmulas de inversión allí establecidas, se determinan explícitamente las soluciones de una ecuación de este tipo: estas soluciones vienen dadas a través de series en las que intervienen los valores y vectores propios del operador compacto autoadjunto asociado a la ecuación, [Lim81, p. 275-277].

**Teorema 3.4.1 (Alternativa de Fredholm).** *Sea $k \in L^2\big([a,b]\times[a,b]\big)$ un núcleo simétrico, es decir, un núcleo que satisface $k(t,s)=\overline{k(s,t)}$, para casi todo $s,t\in[a,b]$. Sea $K$ el operador integral asociado, dado por la fórmula*

$$Kf(t) := \int_a^b k(t,s)\,f(s)\,ds,$$

*para $f\in L^2([a,b])$. Supongamos que*

$$Kf = \sum_{j\in J}\mu_j\langle f,e_j\rangle e_j,$$

*donde $J$ es un conjunto contable y $\{e_n\}_{n\in J}$ es una base hilbertiana de $\overline{\mathrm{Im}K}$. Se considera la ecuación integral de Fredholm siguiente:*

$$f(t)-\mu\int_a^b k(t,s)\;f(s)\,ds = g(t),\quad t\in[a,b], \tag{3.1}$$

*con $g\in L^2([a,b])$. Entonces:*

*(i) Si $\mu=0$, la ecuación* (3.1) *tiene una única solución $f=g$.*

*(ii) Si $1/\mu\neq\mu_n$ para todo $n$, entonces, para cada $g\in L^2([a,b])$, existe una única solución $f$ de la ecuación* (3.1) *que viene dada por*

$$f(t)=g(t)+\mu\left(\sum_j\frac{\mu_j}{1-\mu\mu_j}\left(\int_a^b g(s)\overline{e_j(s)}\,ds\right)e_j(t)\right),\quad t\in[a,b]. \tag{3.2}$$

*En este caso,*

$$\|f\|_2\le\alpha\|g\|_2$$

*para cierta constante $\alpha$ independiente de $g\in L^2([a,b])$.*

*(iii)* *Finalmente, si* $1/\mu = \mu_n$ *para algún* $n$, *entonces la ecuación tiene solución si, y sólo si,* $g \in \ker(\mu_n I - K)^{\perp}$, *y en ese caso, cualquier solución de la ecuación* (3.1) *es de la forma*

$$f(t) = g(t) + \mu \sum_{\mu_j \neq 1/\mu} \frac{\mu_j}{1-\mu\mu_j} \left( \int_a^b g(s)\overline{e_j(s)}\, ds \right) e_j(t) + u(t), \quad t \in [a,b], \tag{3.3}$$

*donde* $u$ *es una función arbitraria de* $\ker(\mu_n I - K)$.

En general, sólo se puede garantizar que estas series solución convergen en media cuadrática, si bien en condiciones bastante generales (por ejemplo, para núcleos continuos) el teorema de Hilbert-Schmidt garantiza que su convergencia es absoluta y uniforme.

**Corolario 3.4.2.** *Sea* $k \in L^2\big([a,b]\times[a,b]\big)$ *un núcleo simétrico tal que*

$$\sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(t,s)|^2\, ds < \infty.$$

*Sean* $\{\mu_n\}_{n\in J}$ *y* $\{e_n\}_{n\in J}$ *como en el teorema 3.4.1. Entonces las series involucradas en las fórmulas dadas en* (3.2) *y* (3.3) *convergen absoluta y uniformemente en* $[a,b]$. *Consecuentemente, las soluciones que allí se dan coinciden en casi todo punto con la suma de estas series.* □

**Lección 3.5 El problema de Sturm-Liouville.**

- Operadores integrales como inversos de operadores diferenciales.
- El problema de Sturm-Liouville. Función de Green.
- Resolución del problema de Sturm-Liouville.
- Ejemplos. Problema asociado a la cuerda vibrante y problema de Dirichlet para un cuadrado.

*Descripción.* Una de las principales motivaciones del desarrollo de la teoría de operadores integrales es que ciertas ecuaciones diferenciales con condiciones frontera pueden ser transformadas en ecuaciones integrales equivalentes. Éste es el caso de los sistemas de Sturm-Liouville, que tienen descrito a su inverso como un operador integral a través de la función de Green. El desarrollo de las lecciones precedentes posibilita la resolución teórica completa de estos problemas. Estudiamos aquí el siguiente tipo de ecuaciones diferenciales,

$$-x''(t) + q(t)x(t) - \mu x(t) = y(t), \tag{3.4}$$

donde $q \in C([a,b])$ con valores reales, $y \in C([a,b])$ con valores complejos y $\mu \in \mathbb{C}$. El problema (regular) de Sturm-Liouville consiste en hallar una solución de (3.4) que verifique, además, las condiciones frontera siguientes:

$$B_a(x) = \alpha\, x(a) + \alpha_1\, x'(a) = 0,$$
$$B_b(x) = \beta\, x(b) + \beta_1\, x'(b) = 0,$$

siendo $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ números reales tales que $|\alpha| + |\alpha_1| \neq 0$ y $|\beta| + |\beta_1| \neq 0$. El operador de Sturm-Liouville es $S : D_S \longrightarrow C\big([a,b],\mathbb{C}\big)$ descrito por

$$S(x) = -x'' + qx,$$

para $x \in D_S$, donde

$$D_S = \Big\{x \in C^2\big([a,b],\mathbb{C}\big) : B_a(x) = B_b(x) = 0\Big\}.$$

En términos de $S$, el problema de Sturm-Liouville planteado consiste en: dada $y \in C\big([a,b],\mathbb{C}\big)$, determinar $x \in D_S$ tal que

$$(S - \mu I)x = y.$$

Cuando $S$ es inyectivo, su operador inverso $G : C\big([a,b]\big) \longrightarrow D_S$ es un operador integral de núcleo simétrico (*función de Green*), al que se le puede aplicar la teoría de Fredholm analizada en las lecciones anteriores para resolver el problema diferencial en los términos que siguen.

**Teorema 3.5.1.** *Consideremos el problema de Sturm-Liouville*

$$\begin{cases} -x'' + qx - \mu x = y \\ B_a(x) = B_b(x) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

*y su operador de Sturm-Liouville asociado, $S$, con dominio $D_S$. Entonces existen una sucesión de números reales distintos $(\nu_n)_n$, y una sucesión de funciones $(u_n)_n$ ortonormales en $L^2([a,b])$, de forma que:*

*(i)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu_n}\right)^2 < \infty.$

*(ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in D_S$ toma valores reales y satisface $Su_n = \nu_n u_n$.*

*(iii) Para cada $x \in D_S$ se tiene que*

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_a^b x(s)\, u_n(s)\, ds\Big) u_n(t),$$

*donde la serie converge absoluta y uniformemente respecto a $t \in [a,b]$.*

*(iv) Si $\mu \neq \nu_n$ para todo $n$, entonces el problema de Sturm-Liouville* (3.5) *tiene solución única para cada $y \in C([a,b])$, que viene dada por*

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_n - \mu} \left(\int_a^b y(s)\, u_n(s)\, ds\right) u_n(t),$$

*siendo la convergencia de la serie absoluta y uniforme respecto a $t \in [a,b]$.*

*(v) Si* $\mu = \nu_k$ *para algún* $k$*, entonces el problema de Sturm-Liouville* (3.5) *tiene solución, únicamente, para aquellas funciones continuas y que cumplen* $y \perp u_k$*. En este caso, las soluciones están dadas por*

$$x(t) = \alpha\, u_k + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty} \frac{1}{\nu_n - \mu} \left( \int_a^b y(s)\, u_n(s)\, ds \right) u_n(t),$$

*donde* $\alpha \in \mathbb{C}$ *es arbitrario, y la serie converge absoluta y uniformemente para* $t \in [a,b]$.

Los resultados anteriores se aplican a la resolución del problema de Sturm-Liouville asociado a la ecuación de la cuerda vibrante con extremos fijos y al problema de Dirichlet para funciones definidas en un cuadrado, [Lim81, Appendix IV]. □

**Lección 3.6 Otros desarrollos del teorema espectral.**

- Valores propios comunes a dos operadores compactos autoadjuntos: Equivalencia unitaria y diagonalización simultánea.
- El teorema espectral para un operador compacto normal. Descomposición espectral de un espacio de Hilbert relativa a un operador compacto normal. Ejemplos.
- Caracterización de los operadores compactos normales.
- Caracterización de los operadores compactos.

*Descripción.* Un análisis de las pruebas de los resultados de la lección 3.3 permite extender éstos a una situación más general, que es la contrapartida infinito-dimensional de la teoría espectral en dimensión finita para los operadores normales. Esta extensión está basada en el hecho de que si dos operadores compactos autoadjuntos en un espacio de Hilbert conmutan, entonces son simultáneamente diagonalizables. Siendo más específicos, dos operadores compactos autoadjuntos $A$ y $B$ en un espacio de Hilbert $H$ conmutan si, y sólo si, existe una base hilbertiana de $H$ cuyos elementos son vectores propios de $A$ y de $B$. Usando ahora la descomposición en parte real y parte imaginaria de un operador normal, se demuestra el teorema correspondiente al teorema 3.3.1 para operadores compactos normales. A partir de aquí es claro que:

**Teorema 3.6.1.** *Sean* $H$ *un espacio de Hilbert sobre* $\mathbb{C}$ *y* $T \in \mathscr{L}(H)$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i) El operador* $T$ *es compacto normal.*

*(ii) Existen un conjunto ortonormal contable de vectores* $\{e_n\}_{n\in J}$ *y un conjunto de escalares* $\{\mu_n\}_{n\in J}$*, con* 0 *como único punto de acumulación, tales que*

$$Tx = \sum_{n\in J} \mu_n \langle x, e_n\rangle e_n.$$

Cuando se quita la hipótesis de normalidad, el teorema espectral (sólo se necesita la versión para operadores compactos autoadjuntos) permite demostrar la siguiente caracterización, que resulta llamativa cuando se compara con el teorema anterior.

**Teorema 3.6.2.** *Sean $H_1$, $H_2$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ y $T \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i) El operador $T$ es compacto.*

*(ii) Existen un conjunto contable $\{\nu_n\}_{n\in J}$ de escalares positivos, con 0 como único punto de acumulación, y conjuntos ortonormales $\{e_n\}_{n\in J}$ en $H_1$ y $\{f_n\}_{n\in J}$ en $H_2$, tales que*

$$Tx = \sum_{n\in J} \nu_n \langle x, e_n \rangle f_n.$$

[GG81, p. 181-187]. $\square$

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Con85], [GG81], [Lim81], [Sch67].

Capítulo 4

# Espacios de Banach y sus duales

**TEMARIO**



En los capítulos precedentes hemos visto cómo se pueden estudiar ciertos problemas analíticos a partir de consideraciones esencialmente geométricas en los espacios de Hilbert, tales como la noción de ortogonalidad, la noción de base hilbertiana, la existencia de proyecciones, etc. Existen muchos problemas en Análisis que pueden ser abordados más fácilmente cuando se llevan a un contexto abstracto, convenientemente elegido. La teoría de los espacios de Hilbert no es siempre suficiente, porque la existencia de productos escalares es un hecho bastante restrictivo.

La teoría de los espacios de Banach ofrece una gran variedad, y tanto en este capítulo como en los siguientes (capítulos 5 y 6) pretendemos exponer una parte de ésta que, aun siendo elemental, proporcione una base sólida para posibles estudios sobre tópicos más especializados. Del estudio que realizamos en este capítulo (propiedades elementales de los espacios normados y espacios de Banach, propiedades de espacios de Banach concretos, teoremas de representación y cálculo de duales, topologías débiles y reflexividad, convexidad estricta y uniforme, etc.), merece una mención especial el teorema de Hahn-Banach, que es, sin duda alguna, uno de los resultados centrales del Análisis Funcional, sobre el que se apoya la rica y fructífera teoría de dualidad, tanto en espacios de Banach como en el contexto general de los espacios localmente convexos.

**Lección 4.1 Espacios normados y espacios de Banach.**

- Espacios normados. Topología y estructura vectorial.
- Isometrías. Normas equivalentes.
- Convergencia absoluta de series en espacios normados. Espacios de Banach.
- Complección de un espacio normado.
- Aplicaciones y formas lineales continuas.
- Generación de nuevos espacios: subespacios, cocientes, productos, sumas de Hilbert para sucesiones de espacios de Banach, duales, espacios de aplicaciones lineales.
- Complementarios topológicos.

*Descripción.* Esta lección tiene por objeto introducir (o recordar en algunos casos) las definiciones y propiedades básicas que vamos a utilizar en el estudio de los espacios de Banach. Ahora, *mediremos longitudes* de vectores, pero no a través de una norma asociada a un producto escalar, como en el caso de espacios de Hilbert. La riqueza de este contexto más general reside en la armoniosa relación existente entre la estructura métrica y la estructura lineal de los espacios objeto de estudio, [Köt69, p. 123-129] y [Lim81, p. 35-70].

**Proposición 4.1.1.** *Sea $X$ un espacio normado. Entonces:*

*(i)* *Las aplicaciones $s : X \times X \longrightarrow X$ y $p : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X$ definidas, respectivamente, mediante*

$$s(x,y) = x + y \qquad y \qquad p(a,x) = ax$$

*son continuas.*

*(ii)* *Las aplicaciones $s_y : X \longrightarrow X$ y $p_a : X \longrightarrow X$, con $a \neq 0$, definidas, respectivamente, por*

$$s_y(x) = x + y \qquad y \qquad p_a(x) = ax$$

*son homeomorfismos (biyectivas y bicontinuas).*

*(iii)* *Si $G$ es un subconjunto abierto de $X$, también lo es $G + A$, cualquiera que sea el conjunto $A \subset X$.*

*(iv)* *Si $F$ es un subconjunto cerrado y $K$ es un subconjunto compacto, entonces $K + F$ es cerrado.*

*(v)* *Si $Y \subset X$ es un subespacio vectorial, también lo es su clausura topológica $\overline{Y}$.*

*(vi)* *Un subespacio $Y \subset X$ es un subespacio propio de $X$ si, y sólo si, el interior de $Y$ es vacío.*

*(vii)* *El espacio normado $X$ es completo si, y sólo si, para cualquier sucesión $(y_n)_n$ en $X$ tal que la serie real*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|$$

*es convergente, se verifica que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge a un punto de $X$.*

*(viii)* *Si $X$ es de Banach e $Y \subset X$ es un subespacio, entonces $Y$ es de Banach si, y sólo si, $Y$ es cerrado en $X$.*

Las aplicaciones lineales son continuas si, y sólo si, son continuas en el cero, y para formas lineales esto ocurre si, y sólo si, su núcleo es cerrado. Se estudian las diversas operaciones para producir espacios normados a partir de otros, prestando especial atención a sumas directas (que permiten hablar de subespacios complementarios) y cocientes (que permiten, por ejemplo, *separar* los espacios $\mathscr{L}^p$). □

**Lección 4.2 Espacios normados y espacios de Banach: ejemplos.**

- Espacios de sucesiones: $c_{00}$, $c_0$, $c$, $\ell^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$.
- Los espacios $L^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$.
- Espacios de funciones continuas.
- Espacios de funciones diferenciables.
- Espacios de funciones holomorfas.
- Espacios de medidas acotadas con la variación total.

*Descripción.* Presentamos aquí algunos ejemplos clásicos de espacios normados y espacios de Banach que tienen un lugar preferencial en el Análisis. Para algunas aplicaciones concretas será interesante estudiar, en lecciones posteriores, ciertas propiedades específicas de estos espacios. De momento, por ejemplo, para los espacios de sucesiones demostramos que sus *normas naturales* lo son, analizamos inclusiones entre ellos, densidad, etc., [Köt69, p. 131-136].

**Proposición 4.2.1.** *Los conjuntos definidos a continuación son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, y las funciones $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_\infty$ son normas sobre los espacios donde están definidas.*

$$\ell^p := \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \ \|x\|_p := \left( \textstyle\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\ell^\infty := \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \ \|x\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)| < \infty \right\},$$

$$c_0 := \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \ \lim_n |x(n)| = 0 \right\},$$

$$c := \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \ \textit{existe } \lim_n x(n) \right\},$$

$$c_{00} := \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \ x(n) = 0 \ \textit{ si } n > n_0, \ \textit{ para cierto } n_0 \in \mathbb{N} \right\}.$$

*Los espacios $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, con $1 \leq p \leq \infty$, son espacios de Banach. Los espacios $c$ y $c_0$ son subespacios cerrados de $\ell^\infty$, y $c_{00}$ (llamado espacio de las sucesiones finitamente no nulas) es denso en $\ell^p$ para $1 \leq p < \infty$.*

*Se tiene*

$$\ell^1 \subseteq \ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty,$$

*siendo las inclusiones continuas y estrictas cuando aparecen denotadas con el símbolo* $\subset$, *donde* $1 \leq p < q < \infty$. *Los espacios* $\ell^p$, $1 \leq p < \infty$, $c_0$ *y* $c$ *son separables, mientras que* $\ell^\infty$ *no lo es.*

También se introducen los espacios $L^p(\mu)$, [Rud88, p. 69-85], de Hardy $H^p(D)$, [Rud88, p. 383-384], (véase la lección 1.1 para $p = 2$) y los espacios de Banach de funciones $m$-veces diferenciables en $[a,b]$ con la norma de convergencia uniforme de las funciones y sus derivadas hasta el orden $m$, [Lim81, p. 40]. □

**Lección 4.3 Espacios de dimensión finita: proyecciones casi-ortogonales.**

- Isomorfismos entre espacios normados de dimensión finita. Subespacios finito-dimensionales de espacios normados. Dimensión de un espacio de Banach.
- Lema de Riesz. Compacidad de la bola unidad. Teorema de Riesz.
- Complementación: subespacios cerrados de codimensión finita.

*Descripción.* Los espacios más sencillos son los de dimensión finita. Para dos de estos espacios con la misma dimensión, cualquier isomorfismo algebraico va a ser también un isomorfismo topológico. Las bolas de las bolas cerradas de los espacios $\mathbb{K}^n$ son compactas, véase [Lim81, p. 44-47].

La compacidad de la bola unidad cerrada de un espacio normado es la propiedad topológica que caracteriza los espacios finito-dimensionales (resultado establecido por Riesz para estudiar los subespacios propios de un operador compacto): esto se puede demostrar como consecuencia del Lema de Riesz o utilizando un bonito argumento debido a Choquet, [Die84, p. 7], basado en que la proyección natural sobre un cociente es continua y abierta.

**Lema 4.3.1 (Riesz).** *Sean* $X$ *un espacio normado e* $Y \subset X$ *un subespacio cerrado propio. Si* $0 < \varepsilon < 1$, *entonces existe* $x_\varepsilon \in X$ *con* $\|x_\varepsilon\| = 1$ *y* $d(x_\varepsilon, Y) \geq 1 - \varepsilon$.

Mientras los espacios normados pueden tener dimensión algebraica numerable, los espacios de Banach no: con el concurso del teorema de Baire, o bien utilizando herramientas meramente algebraicas, [Tsi84], se puede demostrar que un espacio de Banach $X$, o es de dimensión finita, o es de dimensión no numerable. El comportamiento de los espacios normados finito-dimensionales es suficientemente bueno como para probar que todo subespacio cerrado de codimensión finita de un espacio normado tiene complementario topológico, [Köt69, p. 152-156].

La existencia de *proyecciones casi-ortogonales* (lema de Riesz) pudiera hacer pensar que todo subespacio cerrado de un espacio de Banach tiene un complementario topológico; sin embargo esto no es así ($c_0$ no es complementado en $\ell^\infty$, véase la lección 4.8). En el capítulo 6 utilizaremos el lema de Riesz como herramienta esencial para desarrollar la teoría de Riesz-Schauder de operadores compactos en espacios de Banach. □

**Lección 4.4 Duales de algunos espacios de Banach.**

- Duales de los espacios finito-dimensionales.
- Duales de los espacios de sucesiones: $(c_0)^*$, $(c)^*$, $(\ell^p)^*$ para $1 \leq p < \infty$.
- Duales de los espacios de funciones continuas. El teorema de Riesz. El dual de $\ell^\infty$.

*Descripción.* En un espacio de Hilbert, al fijar una variable en el producto escalar, se obtienen suficientes formas lineales continuas; de hecho, el teorema de representación de Riesz nos dice que así se obtiene todo el espacio dual. Para espacios de Banach no se dispone de un resultado semejante, y cada espacio concreto precisa de un estudio particular.

Aquí calculamos los duales de algunos de los espacios introducidos en la lección 4.2. Analizamos, en primer lugar, la igualdad

$$(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)^* = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_q)^*, \quad \text{con } 1 \leq p \leq \infty \text{ y } 1/p + 1/q = 1.$$

La contrapartida infinito-dimensional nos conduce a las igualdades para los espacios de sucesiones. Para los espacios duales se tiene:

$$(c_0, \|\cdot\|_\infty)^* = (\ell^1, \|\cdot\|_1) \qquad \text{y} \qquad (\ell^p, \|\cdot\|_p)^* = (\ell^q, \|\cdot\|_q), \quad 1 \leq p < \infty,$$

donde $1/p + 1/q = 1$, [Köt69, p. 130-144]. El cálculo del dual de $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, en términos de medidas finitamente aditivas definidas en $\mathbb{N}$, no forma parte de la lección (véase, por ejemplo, [Köt69, p. 424-426]). Sin embargo, conocido que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty) = \big(C(\beta\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty\big)$, el teorema de representación de Riesz 4.4.1 proporciona un modelo para $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)^*$.

**Teorema 4.4.1 (Riesz, [Coh80, p. 205-225]).** *Si $X$ es un espacio localmente compacto y $\mu \in M(X)$ (donde $M(X)$ es el espacio de las medidas regulares definidas en la $\sigma$-álgebra de Borel de $X$, dotado de la norma de la variación total), definimos $F_\mu : C_0(X) \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante la fórmula*

$$F_\mu(f) := \int_X f \, d\mu.$$

*Entonces, $F_\mu \in C_0(X)^*$, y además, la aplicación $\mu \mapsto F_\mu$ es un isomorfismo isométrico de $M(X)$ sobre $C_0(X)^*$.*

En el caso en el que $X = [a,b]$, se interpretará el dual $\big(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty\big)^*$ como un espacio de funciones de variación acotada normalizadas, estableciendo la asociación entre éstas y los funcionales continuos a través de la integral de Riemann-Stieltjes, [RSN72], tal y como fue demostrado por Riesz en 1909.

La igualdad

$$\big(L^p(\mu), \|\cdot\|_p\big)^* = \big(L^q(\mu), \|\cdot\|_q\big), \quad 1 \leq p < \infty,$$

es comentada, y su demostración aplazada hasta la lección 4.10, donde se obtiene como consecuencia de la *convexidad uniforme* de la norma de $L^p$ para $1 < p < \infty$. □

**Lección 4.5 El teorema de Hahn-Banach.**

- Formas lineales continuas reales y complejas.
- El teorema de Hahn-Banach. Extensión de formas lineales reales dominadas por funcionales subaditivos positivamente homogéneos y por seminormas.
- Para espacios normados. Extensión de formas lineales continuas. La norma a través del dual. Cierre de un subespacio. Espacios con dual separable. Complementación de subespacios finito-dimensionales.
- Unicidad de las extensiones. Normas estrictamente convexas. Caracterización de los espacios normados con unicidad en las extensiones de formas lineales preservando normas.

*Descripción.* En lecciones precedentes hemos visto que el dual de un espacio normado es un espacio de Banach, y para algunos espacios concretos hemos calculado sus duales, viendo que éstos tienen bastantes formas lineales; sin embargo, no podemos asegurar, en principio, que el dual de un espacio normado cualquiera contenga siempre elementos distintos del cero. El objeto de esta lección es establecer el teorema de extensión de Hahn-Banach, [Köt69, p. 190-191], del que se sigue directamente la existencia de formas lineales continuas en todo espacio normado, en cantidad suficiente como para distinguir puntos del mismo. El teorema de Hahn-Banach es, sin lugar a dudas, uno de los teoremas más importantes y de mayor alcance del Análisis Funcional. Su prueba clásica es de naturaleza analítica, y ésta es la que presentamos aquí, dejando para la lección siguiente sus consecuencias geométricas. Se destaca el papel del lema de Zorn en esta prueba (comentando que, de hecho, el teorema de extensión es lógicamente equivalente a una versión débil del Axioma de Elección); también se destaca que, en el caso separable (caso que cubre muchas situaciones en las que se precisa del teorema de Hahn-Banach), sólo es necesario el principio de inducción sobre los naturales para completar la demostración.

Entre otros resultados de tipo teórico que se derivan del teorema de Hahn-Banach, resaltamos que la caracterización del cierre de un subespacio de un espacio normado, a través de los elementos del dual que se anulan en dicho subespacio, es de importancia fundamental, y uno de los criterios más útiles para estudiar problemas de aproximación. Los resultados que siguen son presentados como corolario del teorema de Hahn-Banach, [Lim81, p. 55] y [Köt69, p.196 y 239].

**Corolario 4.5.1.** *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio normado sobre $\mathbb{K}$.*

*(i) Si $0 \neq x \in X$, entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y $f(x) = \|x\|$.*

*(ii) Para todo $x \in X$ se tiene*

$$\|x\| = \sup\left\{|f(x)| : f \in B_{X^*}\right\} = \max\left\{|f(x)| : f \in B_{X^*}\right\}.$$

*(iii) Sea $Y$ un subespacio vectorial de $X$ y sea $x \in X$ tal que $d(x,Y) = \delta > 0$. Entonces existe $f \in X^*$ tal que $f(y) = 0$ para todo $y \in Y$, $f(x) = 1$ y $\|f\| = \delta^{-1}$.*

*(iv)* *Si $Y$ es un subespacio vectorial de $X$, entonces*

$$\overline{Y} = \bigcap_{f \in E} \ker f,$$

*donde* $E = \{f \in X^* : Y \subset \ker f\}$.

*(v)* *Si $S$ es un subconjunto de $X$, entonces*

$$\overline{\operatorname{lin}(S)} = \bigcap_{f \in E} \ker f,$$

*donde* $E = \{f \in X^* : S \subset \ker f\}$.

*(vi)* *Un conjunto $S \subset X$ es total (es decir, su clausura lineal cerrada coincide con $X$) si, y sólo si, la única aplicación lineal y continua que se anula en $S$ es la nula.*

*(vii)* *Sean* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ *linealmente independientes, entonces existen* $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset X^*$ *tales que* $f_i(x_j) = \delta_{ij}$.

*(viii)* *Todo subespacio de $X$ de dimensión finita posee un complementario topológico.*

*(ix)* *Si $Y$ es un subespacio de $X$, entonces la aplicación restricción $\psi : X^* \longrightarrow Y^*$ es lineal, continua, sobreyectiva y abierta. En particular, si $X^*$ es separable, $Y^*$ también lo es.*

La lección se completa con el estudio de la unicidad de las extensiones, dando una prueba del teorema de Taylor-Foguel, [Lim81, p. 57-58], que sigue, el cual relaciona una propiedad algebraico-analítica con una propiedad geométrica.

**Teorema 4.5.2 (Taylor-Foguel, 1958).** *En un espacio normado $X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i)* *El espacio dual $X^*$ con la norma dual es estrictamente convexo (*i.e.*, la esfera unidad no contiene segmentos).*

*(ii)* *Para cada subespacio $Y \subset X$ y cada forma lineal continua $f : Y \longrightarrow \mathbb{K}$, existe una única forma lineal $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ que extiende a $f$ con $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.* □

**Lección 4.6 Aspectos geométricos del teorema de Hahn-Banach.**

- Funcional de Minkowski asociado a un conjunto convexo absorbente.
- Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach. Teorema de Mazur.
- Semiespacios asociados a un hiperplano. Separación.
- Primer teorema de separación para conjuntos convexos.
- Segundo teorema de separación: para un convexo cerrado y un convexo compacto.
- Cierre de un conjunto convexo.

*Descripción.* La relación existente entre conjuntos convexos absorbentes y funcionales subaditivos positivamente homogéneos, [Köt69, p. 180], permite obtener la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach a partir del teorema de extensión de formas lineales (versión analítica del teorema de Hahn-Banach). Se establece así que todo conjunto convexo abierto no vacío que no corta a una variedad lineal, tampoco corta a un hiperplano cerrado que contenga a la variedad, [Köt69, p. 191].

**Teorema 4.6.1 (Mazur).** *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio normado, $M \subset X$ una variedad afín y $A \subset X$ un conjunto abierto convexo no vacío. Si $A \cap M = \emptyset$, entonces existe un hiperplano afín cerrado $H$ en $(X,\|\cdot\|)$ tal que $A \cap H = \emptyset$ y $M \subset H$.*

Se pueden ahora separar por hiperplanos cerrados cualesquiera convexos disjuntos, siempre que uno de ellos tenga interior no vacío (primer teorema de separación) o siempre que uno de ellos sea cerrado y el otro compacto (segundo teorema de separación), [Sch71, p. 67-68]:

**Corolario 4.6.2 (Segundo teorema de separación).** *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio normado y $K$, $F$ subconjuntos convexos disjuntos de $X$, con $K$ compacto y $F$ cerrado. Entonces existe un hiperplano real cerrado que separa estrictamente $K$ y $F$. Más aún, existen $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que*

$$f(y) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha < f(z),$$

*para todo $y \in K$ y todo $z \in F$.*

Como una consecuencia del segundo teorema de separación de conjuntos convexos se obtiene que todo conjunto convexo cerrado es la intersección de los semiespacios reales cerrados que lo contienen, [Sch71, p. 69], que es la versión general del resultado establecido en la lección anterior para los cierres de subespacios de un espacio normado. Queda patente, después de la presentación que se hace de los teoremas de separación de conjuntos convexos, que éstos se pueden llevar a un contexto más general (espacios localmente convexos); también queda claro que, en casos más particulares (espacios de Hilbert o espacios de dimensión finita), los teoremas de separación de conjuntos convexos pueden obtenerse utilizando la existencia de mejores aproximaciones. □

### Lección 4.7 Aplicaciones del teorema de Hahn-Banach.

- Límites generalizados de Banach.
- Extensión de medidas finitamente aditivas.
- Una aproximación abstracta a la integral de Poisson.

*Descripción.* El teorema de Hahn-Banach se aplica a numerosas situaciones y, de hecho, como veremos, bastantes resultados del Análisis Funcional están fundamentados en él o en consecuencias suyas. Entre las posibles aplicaciones, hemos elegido para esta lección, además de las clásicas sobre existencia de límites generalizados, [Con85, p. 82-83], una que nos permite extender medidas no necesariamente $\sigma$-aditivas en un álgebra a la $\sigma$-álgebra generada y otra a una versión abstracta de la integral de Poisson.

La aplicación que damos sobre una versión abstracta de la integral de Poisson está enmarcada en la teoría de funciones armónicas y holomorfas, [Rud88, p. 126-127]: aquí necesitamos también el concurso del teorema de Riesz, que permite representar el dual de un espacio de funciones continuas sobre un espacio topológico compacto, véase la lección 4.4. Como colofón de la aproximación abstracta que se hace a la integral de Poisson, se establece el siguiente resultado.

**Teorema 4.7.1.** *Supongamos que $A$ es un espacio vectorial de funciones complejas continuas en el disco unidad cerrado $\overline{D}$. Si $A$ contiene todos los polinomios, y si*

$$\sup_{z\in\overline{D}} |f(z)| = \sup_{z\in\mathbb{T}} |f(z)|,$$

*para toda $f \in A$, entonces la representación integral de Poisson*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} f(e^{it})\,dt \qquad (z = re^{i\theta})$$

*es válida para toda $f \in A$ y todo $z \in D$.* □

Este resultado puede utilizarse para demostrar un *recíproco* del principio del módulo máximo para funciones holomorfas, véase [Rud88, Teorema 12.13].

## Lección 4.8 Las topologías débil y débil$^*$: una introducción.

- Definición de topología débil. No metrizabilidad de la topología débil en dimensión infinita. Convergencia débil y convergencia en norma. Lema de Schur en $\ell^1$.
- Cierre débil de un convexo.
- La topología débil$^*$. La topología débil$^*$ del bidual. Inmersión de un espacio en su bidual. $c_0$ no es complementado en $\ell^\infty$. El teorema de Alaoglu. Espacios de Banach como espacios de funciones continuas.

*Descripción.* [Bre84, p. 35-43] y [Köt69, p. 427]. Las dos topologías más débiles que las asociadas a normas, y de mayor interés en la teoría de espacios de Banach son la topología débil y la topología débil$^*$. La primera (la topología débil) está presente en cada espacio normado. La segunda (la topología débil$^*$) está presente sólo en espacios duales, y tiene la contrapartida de que la bola dual es débil$^*$-compacta: teorema de Alaoglu.

Las topologías débiles en espacios normados son las primeras que encontramos con un buen comportamiento respecto a la estructura vectorial de los espacios base y que no son, en sí mismas, topologías dadas por una norma (de hecho, no son ni tan siquiera metrizables en espacios de dimensión infinita). Estas topologías son topologías localmente convexas (separadas después del teorema de Hahn-Banach) y como tales, gozan de las buenas propiedades de estas últimas. La omnipresencia del teorema de Hahn-Banach queda patente una y otra vez: los conjuntos convexos son cerrados si, y sólo si, son débilmente cerrados; otro botón de muestra es el siguiente resultado que se prueba en la lección.

**Teorema 4.8.1.** *Todo espacio normado (de Banach) se identifica isométricamente con un subespacio (cerrado) de un espacio de funciones continuas sobre un espacio compacto. Concretamente, sean* $(X,\|\cdot\|)$ *un espacio normado,* $K=\big(B_{X^*},\sigma\big(X^*,X\big)\big)$ *e* $i:\big(X,\|\cdot\|\big)\longrightarrow\big(C(K),\|\cdot\|_\infty\big)$ *la aplicación que hace corresponder, a cada* $x\in X$*, la función* $\widehat{x}:K\longrightarrow\mathbb{K}$ *dada por* $\widehat{x}(x^*)=x^*(x)$*. Entonces, i es un isomorfismo isométrico sobre su imagen que permite identificar* $(X,\|\cdot\|)$ *con un subespacio de* $C(K)$*. i es un isomorfismo de* $(X,\sigma(X,X^*))$ *sobre su imagen en* $(C(K),\tau_p)$*.*

Esta lección es una introducción a la llamada *teoría general de dualidad*, que se lleva a cabo en una asignatura distinta: *Espacios localmente convexos*, optativa de 6 créditos de Segundo Ciclo de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Murcia. □

**Lección 4.9 Un apunte sobre reflexividad.**

- Espacios de Banach reflexivos.
- El teorema de Helly. El teorema de Goldstine.
- Caracterización de los espacios de Banach reflexivos.
- Subespacios cerrados de un Banach reflexivo. Dual de un Banach reflexivo: reflexividad. Reflexividad y separabilidad. Ejemplos.

*Descripción.* [Bre84, p. 43-47]. En esta lección desarrollamos de forma elemental los resultados básicos de los espacios de Banach reflexivos. La idea es obtener la caracterización de los espacios de Banach reflexivos como aquéllos en los que su bola unidad cerrada es débilmente compacta. Para establecer esta equivalencia sólo es necesario conocer el teorema de Alaoglu para una implicación, y para la otra, saber que un convexo cerrado de $\mathbb{R}^n$ y un punto fuera del convexo se separan estrictamente por un hiperplano, lo que constituye la clave para demostrar el lema de Helly que se enuncia a continuación:

**Lema 4.9.1.** *Sean* $(X,\|\cdot\|)$ *un espacio normado,* $f_1,f_2,\dots,f_n\in X^*$ *y* $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i) Para cada* $\varepsilon>0$ *existe* $x_\varepsilon\in X$*, con* $\|x_\varepsilon\|\le 1$*, tal que*

$$|f_i(x_\varepsilon)-\alpha_i|<\varepsilon,\quad i=1,2,\dots,n.$$

*(ii) Para cada* $(\beta_i)_{i=1}^n$ *en* $\mathbb{K}^n$*,*

$$\left|\sum_{i=1}^n\beta_i\alpha_i\right|\le\left\|\sum_{i=1}^n\beta_i f_i\right\|.$$

Con el lema de Helly es fácil probar ahora que la bola unidad $B_X$ de un espacio normado es $\sigma(X^{**},X^*)$-densa en la bola del bidual $B_{X^{**}}$ (teorema de Goldstine), obteniéndose, a partir de aquí, la caracterización anteriormente comentada de los espacios de Banach reflexivos. Los espacios de Banach reflexivos comparten con los espacios de Hilbert la propiedad de que en todo conjunto convexo y cerrado hay un elemento de norma mínima. Más aún, toda función convexa semicontinua inferiormente y definida en un convexo cerrado de un espacio de Banach reflexivo alcanza un mínimo en el conjunto. Además de los espacios de Hilbert, se presentan como espacios reflexivos los espacios $\ell^p$ y $L^p(\mu)$ para $1 < p < \infty$, que son estudiados con más detalle en la lección 4.10. Se razona que el resto de espacios presentados hasta ahora no son reflexivos: $c_0$, $\ell^1$, $\ell^\infty$, $C(K)$, $L^1(\mu)$ y $L^\infty(\mu)$. □

**Lección 4.10 Espacios de Banach uniformemente convexos.**

- Espacios de Banach uniformemente convexos. Caracterización. Ejemplos.
- Teorema de Milman. Reflexividad de los espacios de Banach uniformemente convexos.
- Convergencia débil y convergencia en norma en los espacios de Banach uniformemente convexos.
- La topología débil sobre la esfera de un espacio de Banach uniformemente convexo.
- Convexidad uniforme de los espacios $\ell^p$ y $L^p(\mu)$, $2 \leq p < \infty$.
- Aplicaciones. Dual de $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$. Dual de $L^1(\mu)$, para $\mu$ $\sigma$-finita.
- Teorema de Clarkson. Convexidad uniforme de $\ell^p$, $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$.

*Descripción.* En esta lección estudiamos una importante subclase de la clase de espacios de Banach reflexivos: los espacios de Banach uniformemente convexos. La noción de convexidad uniforme (más fuerte que la de convexidad estricta) para la bola unidad de un espacio de Banach es un concepto geométrico, que pretende paliar las desventajas que la bola asociada a una norma cualquiera presenta en relación a la de un espacio de Hilbert.

Así, los primeros ejemplos que nos encontramos de espacios de Banach uniformemente convexos son los espacios de Hilbert y, como vemos aquí, los primeros (*i.e.*, los Banach uniformemente convexos) comparten algunas de las buenas propiedades de los segundos; por ejemplo, el ser reflexivos (teorema de Milman), el que las sucesiones débilmente convergentes cuya sucesión de normas converge sean convergentes en norma, o el hecho de que todo convexo cerrado posea un único elemento de norma mínima, [Lim81, p. 133-135] y [Köt69, p. 353-355]. Una propiedad remarcable, contenida en las ya comentadas, es que, para todo espacio de Banach uniformemente convexo, la topología débil y la de la norma coinciden en su esfera unidad.

La identidad del paralelogramo permite probar que todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach uniformemente convexo; en particular, los espacios $\ell^2$ y $L^2(\mu)$ son espacios uniformemente convexos; más en general, los espacios $\ell^p$ y $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, también lo son, [Köt69,

p. 355]. El hecho de que $\ell^p$ y $L^p(\mu)$, para $p \geq 2$, sean uniformemente convexos, está basado en la desigualdad

$$\big(|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p\big)^{1/p} \leq 2^{p-1}\big(|\alpha|^p + |\beta|^p\big) \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{K},$$

la cual nos permite razonar, en este caso general, de forma análoga a como se hace en un espacio de Hilbert con la identidad del paralelogramo. Conociendo que $L^p(\mu)$, $p \geq 2$, es uniformemente convexo, sabemos que $L^p(\mu)$, $p \geq 2$, es reflexivo, y de aquí, una elegante argumentación con el teorema de Hahn-Banach es suficiente para establecer que

$$\big(L^p(\mu)\big)^* = L^q(\mu), \quad 1 < p,q < \infty,$$

con $1/p+1/q=1$. Utilizamos estos resultados para probar ahora que $\big(L^1(\mu)\big)^* = L^\infty(\mu)$ cuando $\mu$ es una medida $\sigma$-finita.

Así las cosas, sabemos que $L^p(\mu)$, para $2 \leq p < \infty$, es uniformemente convexo, y que $L^p(\mu)$, para $1 < p < \infty$, es reflexivo. La convexidad uniforme de $L^p(\mu)$, cuando $1 < p < 2$, (teorema de Clarkson, [Köt69, p. 357-359]) requiere un análisis más fino que, eventualmente, pudiera ser comentado y no probado en clase. $\square$

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Bre84], [Die84], [DS58], [Köt69], [Jam74], [Jar81], [Lim81], [Rud88], [Sch71].

Capítulo 5

# La propiedad de Baire y sus consecuencias en espacios de Banach

**TEMARIO**



Al estudiar espacios de Banach uno se encuentra con tres principios fundamentales sobre los que se sustenta prácticamente toda la teoría: el teorema de Hahn-Banach, el teorema de Banach-Steinhaus y el teorema de la gráfica cerrada y la aplicación abierta. Estos principios y sus corolarios están presentes en buena parte de los resultados concernientes a espacios de Banach, y constituyen el fundamento para otros resultados en diversos campos.

Habiendo estudiado en el capítulo anterior el teorema de Hahn-Banach y algunas de sus consecuencias, dedicamos este capítulo al estudio de los otros dos principios fundamentales, que son consecuencia de la propiedad de Baire de la que gozan los espacios métricos completos y, en particular, los espacios de Banach. Ilustramos el alcance de estos resultados con diversas aplicaciones, tales como la existencia de funciones continuas con series de Fourier divergentes, equivalencia de holomorfía débil y holomorfía fuerte, continuidad de los funcionales asociados a una base, etc.

## Lección 5.1 El principio de la acotación uniforme.

- Preliminares: categorías. El teorema de Baire.
- El principio de la acotación uniforme. Ejemplos.
- Teorema de Banach-Steinhaus. Convergencia puntual de sucesiones de operadores.
- El teorema de Banach-Mackey. Convergencia débil de sucesiones en $C(K)$.

*Descripción.* En esta lección centramos nuestra atención en otro teorema fundamental del Análisis Funcional: el principio de la acotación uniforme, [Lim81, p. 71-73].

**Teorema 5.1.1 (Principio de la acotación uniforme, Banach, 1932).** *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones lineales continuas del espacio normado $X$ en el espacio normado $Y$ y sea*

$$D := \Big\{x \in X : \sup_{i\in I} \|A_i(x)\| = \infty\Big\}.$$

*(i) Si $D^c$ es de segunda categoría, entonces $D$ es vacío y $\sup_{i\in I} \|A_i\| < \infty$.*
*(ii) Si $X$ es de Banach, entonces, o bien $\sup_{i\in I} \|A_i\| < \infty$, o bien $D$ es un $G_\delta$ denso en $X$.*

A pesar de ser un resultado no excesivamente costoso de establecer (su prueba es, en esencia, una aplicación más o menos inmediata del teorema de la categoría: *en todo espacio métrico completo, la intersección de una cantidad numerable de abiertos densos es densa*), sus aplicaciones son variadas e interesantes. Como consecuencias inmediatas se obtienen, por ejemplo, que para toda sucesión de operadores entre espacios de Banach que converge puntualmente, el límite es continuo (teorema de Banach-Steinhaus), o que los conjuntos débilmente acotados y los acotados en norma son los mismos en cualquier espacio normado (teorema de Banach-Mackey).

Como aplicación del teorema de Banach-Mackey y del teorema de Riesz (véase la lección 4.4) se caracterizan las sucesiones débilmente convergentes en los espacios $C(K)$ como las sucesiones puntualmente convergentes y uniformemente acotadas. Terminamos remarcando que, con el concurso del teorema de Hahn-Banach, también se tiene que si $(f_n)_n$ es una sucesión que converge puntualmente hacia $f$ en un espacio $C(K)$, entonces existe una sucesión $(g_n)_n$ de combinaciones convexas de $(f_n)_n$ que converge uniformemente hacia $f$. □

**Lección 5.2 Aplicaciones del principio de la acotación uniforme.**

- Convergencia de fórmulas de cuadratura: un teorema de Polya para integración numérica.
- Un teorema de Dunford sobre funciones holomorfas vectoriales.
- Métodos de sumabilidad y transformaciones matriciales: un teorema de Toeplitz.
- Existencia de funciones continuas con serie de Fourier puntualmente divergente.

*Descripción.* Al igual que en otras lecciones nos hemos ocupado, o nos ocuparemos, de mostrar la aplicabilidad de los distintos resultados importantes establecidos, en esta lección examinamos algunos problemas en los que el teorema de Banach-Steinhaus resulta de gran utilidad. Utilizamos el teorema de la acotación uniforme para establecer un teorema de Polya sobre convergencia de fórmulas de cuadratura, [Lim81, p. 75-77], que permite, por ejemplo, obtener la convergencia del método de Simpson de integración numérica y el teorema de Stieltjes probado en la lección 1.6. Otra aplicación que demostramos es la siguiente, [Lim81, p. 74-75]:

**Teorema 5.2.1 (Dunford, 1938).** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $X$ un espacio de Banach complejo y $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i)* *$f$ es holomorfa,* i.e.*, para cada $a \in \Omega$, existe el límite en $X$*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

*(ii)* *$x^* \circ f \in \mathscr{H}(\Omega)$ para cada $x^* \in X^*$.*

También utilizamos el principio de la acotación uniforme para caracterizar las matrices infinitas que proporcionan métodos de sumabilidad permanentes entre espacios de sucesiones (teorema de Toeplitz, [Lim81, p. 78-80]), y por último, estudiamos la existencia de funciones continuas con series de Fourier puntualmente divergentes, estableciendo el siguiente resultado, [Lim81, p. 77-78] y [Rud88, p. 114-117]:

**Teorema 5.2.2.** *Sea $X = \{f \in C([-\pi,\pi]) : f(\pi) = f(-\pi)\}$, con la norma inducida por $\|\cdot\|_\infty$ de $C([-\pi,\pi])$. Para $f \in X$, sean $s_n(f;x)$ la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier de $f$ en $x$, y*

$$s^*(f;x) := \sup\{|s_n(f;x)| : n \in \mathbb{N}\}.$$

*Entonces, existe un $G_\delta$ denso $F \subset X$ con la propiedad de que, para cada $f \in F$, el conjunto*

$$Q_f := \{x \in [-\pi,\pi] : s^*(f;x) = \infty\}$$

*es un $G_\delta$ denso en $[-\pi,\pi]$.* □

**Lección 5.3 El teorema de la gráfica cerrada.**

- Series convexas. Conjuntos CS-cerrados y CS-compactos. Ejemplos. Propiedades.
- Propiedad fundamental de los conjuntos CS-cerrados. Aplicación: todo espacio de Banach separable es un cociente de $\ell^1$.
- El teorema de la gráfica cerrada. Limitaciones.
- Isomorfismos entre espacios de Banach. Subespacios complementados.
- Aplicaciones abiertas entre espacios normados. El teorema de la aplicación abierta.
- Una prueba alternativa del principio de la acotación uniforme.

*Descripción.* [Jam74, p. 178-217]. CS-cerrados y CS-compactos están definidos en términos de series convexas. Estas nociones desempeñan un papel central en el teorema de la gráfica cerrada, del que damos una demostración próxima a la original de Banach y que, por su sencillez y profundidad, puede ser adaptada fácilmente a situaciones mucho más generales.

Un conjunto $A$ de un espacio normado se dice que es CS-cerrado (respectivamente, CS-compacto) si para cada elección de escalares $\lambda_n \geq 0$ con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1,$$

y cada elección $x_n \in A$, $n = 1,2,\ldots$, de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in A$ (respectivamente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in A$). La propiedad fundamental de los conjuntos CS-cerrados es que ellos y su cierre tienen el mismo interior, *i.e.*, si $A$ es CS-cerrado, entonces $\operatorname{int}\overline{A} \subset A$. Esta propiedad es la clave para demostrar el teorema de la gráfica cerrada entre espacios de Banach, cuya demostración uno no se resiste a escribir en unas pocas líneas, [Jam74, p. 217]:

**Teorema 5.3.1 (Teorema de la gráfica cerrada, Banach, 1932).** *Sean $X$ e $Y$ espacios de Banach y $T$ una aplicación lineal de $X$ en $Y$. Son equivalentes:*

*(i) $T$ es continua.*

*(ii) $T$ tiene gráfica cerrada.*

*Demostración.* Basta probar que $T^{-1}(B_Y)$ es un entorno del origen. Por ser $Y$ un espacio de Banach, $B_Y$ es CS-compacto, y como $T$ tiene gráfica cerrada, se tiene que $T^{-1}(B_Y)$ es CS-cerrado. Pero entonces, $T^{-1}(B_Y)$ y $\overline{T^{-1}(B_Y)}$ tienen el mismo interior. De la igualdad $Y = \bigcup_n nB_Y$ se sigue que $X = \bigcup_n nT^{-1}(B_Y)$. El teorema de Baire garantiza que, para algún $n_0$, el conjunto $n_0T^{-1}(B_Y)$ no es denso en ninguna parte. Pero al ser las homotecias homeomorfismos, necesariamente el interior de $\overline{T^{-1}(B_Y)}$ es no vacío y, en consecuencia, $T^{-1}(B_Y)$ tiene puntos interiores; sólo resta probar que 0 es uno de ellos. Si $B(x_0,r) \subset T^{-1}(B_Y)$, también se tiene $B(-x_0,r) \subset T^{-1}(B_Y)$, debido a la simetría de $T^{-1}(B_Y)$. Y entonces se obtiene

$$B(0,r) \subseteq \frac{1}{2}B(x_0,r) + \frac{1}{2}B(-x_0,r) \subseteq \frac{1}{2}T^{-1}(B_Y) + \frac{1}{2}T^{-1}(B_Y) \subseteq T^{-1}(B_Y),$$

por la convexidad de $T^{-1}(B_Y)$. □

Las mismas ideas sirven para dar una prueba elemental del teorema de la aplicación abierta, si bien nos encargamos de demostrar que el teorema de la aplicación abierta es, lógicamente, equivalente al teorema de la gráfica cerrada. Para ambos, las hipótesis de completitud de los espacios involucrados es esencial, y así se pone de manifiesto mediante ejemplos adecuados. La lección se completa con unas primeras consecuencias de estos resultados centrales (si dos subespacios cerrados de un espacio de Banach son algebraicamente complementarios, también son topológicamente complementarios, [Lim81, p. 85]) y con una prueba del principio de la acotación uniforme vía el teorema de la gráfica cerrada, [GG81, p. 223]. □

**Lección 5.4 Aplicaciones de los teoremas de la gráfica cerrada y la aplicación abierta.**

- Caracterización topológica de la equivalencia de normas completas. Normas completas equivalentes a la norma del supremo en los espacios $C(K)$. Normas completas equivalentes a $\|\cdot\|_1$ en el espacio $L^1([0,2\pi])$.
- Topología de los subespacios cerrados de $L^p$ y $L^q$ que están en la intersección $L^p \cap L^q$, para $1 \leq p,q \leq \infty$. Un teorema de Grothendieck: caracterización de los subespacios cerrados de $L^p$ que están en $L^\infty$.
- Condición suficiente para la continuidad de operadores entre espacios de sucesiones: $c_0$, $c$, $\ell^p$, con $1 \leq p \leq \infty$.
- Aproximación de soluciones de una ecuación diferencial.
- ¿El recíproco del lema de Riemann-Lebesgue?

*Descripción.* El teorema de la gráfica cerrada puede mirarse del siguiente modo: de la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación $Tx = y$ ($T : X \longrightarrow Y$ operador lineal acotado entre espacios de Banach) se obtiene que, al variar poco el término independiente $y$, la solución $x$ también varía poco. De hecho, estas consideraciones constituyen el fundamento teórico para muchos problemas de aproximación, como por ejemplo, para ecuaciones diferenciales. A lo largo del curso, los teoremas de la gráfica cerrada y de la aplicación abierta se utilizarán en bastantes situaciones para derivar otros resultados centrales del Análisis Funcional. De momento, y como muestra de su alcance, damos algunos ejemplos concretos:

- si $\|\cdot\|$ es una norma para la que un espacio $C(K)$ es completo y la topología asociada a $\|\cdot\|$ es más fina que la topología de convergencia puntual en $C(K)$, entonces $\|\cdot\|$ es equivalente a $\|\cdot\|_\infty$;
- si $\|\cdot\|$ es una norma para la que un espacio $L^1([0,2\pi])$ es completo y las formas lineales asociadas a los coeficientes de Fourier son continuas para $\|\cdot\|$, entonces $\|\cdot\|$ es equivalente a $\|\cdot\|_1$, [Lim81, p. 84];
- si $(\Omega,\Sigma,\mu)$ es un espacio de medida $\sigma$-finito y $S \subset L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ es un subespacio cerrado, entonces $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_q$ inducen en $S$ la misma topología, $1 \leq p,q \leq \infty$.

Mucho más sorprendente es el siguiente teorema de Grothendieck, también consecuencia del teorema de la gráfica cerrada, del que se puede encontrar una elegante demostración en [Rud79, p. 114-115].

**Teorema 5.4.1.** *Sean $(\Omega,\Sigma,\mu)$ un espacio de probabilidad y $1 \leq p < \infty$. Si $S \subset L^p(\mu)$ es un subespacio cerrado y $S \subset L^\infty(\mu)$, entonces $S$ es finito-dimensional.*

Como aplicación del teorema de la aplicación abierta mostramos que, para ecuaciones diferenciales no homogéneas de coeficientes no constantes

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = y(t), \text{ para } t \in [a,b],$$

con $y, a_i \in C([a,b])$ (para todo $i = 0,1,...,n$), que satisfacen las condiciones iniciales

$$S \equiv \left\{x(a) = x'(a) = ... = x^{(n-1)}(a) = 0\right\},$$

sus soluciones dependen continuamente (tanto ellas como sus derivadas de orden $n$) del término independiente, [Lim81, p. 89].

Cerramos la lección utilizando otra vez el teorema de la aplicación abierta para demostrar que no se satisface el recíproco del lema de Riemann-Lebesgue, *i.e.*, que la aplicación de $L^1([0,2\pi])$ en $c_0(\mathbb{Z})$ que a cada función le asigna la sucesión de sus coeficientes de Fourier, no es sobreyectiva, [Lim81, p. 89]. $\square$

**Lección 5.5 Bases en espacios de Banach.**

- Bases y bases de Schauder. Ejemplos en los espacios de sucesiones.
- Equicontinuidad de las proyecciones asociadas a una base. Las bases de un espacio de Banach como bases de Schauder.
- Sistemas biortogonales y bases.
- El teorema de la base débil en espacios de Banach.

*Descripción.* Todo espacio de Hilbert posee una base hilbertiana que es numerable si el espacio es separable. La riqueza de la teoría de los espacios de Hilbert se debe, en gran medida, al hecho de poder trabajar con *coordenadas* de los elementos respecto a una base dada. El deseo de llevar esta situación a los espacios de Banach, conduce a considerar el concepto de base topológica en esta clase de espacios.

Si $X$ es un espacio normado, una base (respectivamente, base débil) en $X$ es una sucesión $(x_n)_n$ en $X$ tal que, para cada $x \in X$, existe una sucesión $(\lambda_n(x))_n$ en $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, unívocamente determinada, que satisface la igualdad

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x) x_n$$

para la topología de la norma (respectivamente, débil) de $X$. Los coeficientes $\lambda_n(x)$ dependen linealmente de $x$, y cuando son continuos, la base (respectivamente, base débil) se llama base de Schauder (respectivamente, base de Schauder débil).

A diferencia de los espacios de Hilbert, no todo espacio de Banach separable tiene una base, como fue puesto de manifiesto por Enflo; e incluso en algunos de los espacios habituales, la constatación de la existencia de una base resulta algo complicada. Mostramos, como consecuencia del teorema de la gráfica cerrada, que toda base en un espacio de Banach es de Schauder [Lim81, p. 65-67], *i.e.*, que los coeficientes funcionales son continuos. De hecho, demostramos un resultado más general:

**Teorema 5.5.1 (Teorema de la base débil de Banach).** *Sean $X$ un espacio de Banach, $(x_n)_n$ una base débil y, para cada $m \in \mathbb{N}$,*

$$P_m(x) = \sum_n \lambda_n(x) x_n.$$

*Entonces la familia de proyecciones sobre la base $\{P_m\}_m$ es equicontinua y, consecuentemente, $(x_n)_n$ es una base de Schauder para la norma del espacio $X$.*

La demostración del teorema de la base débil requiere del concurso del teorema de Banach-Steinhaus, del teorema de la gráfica cerrada (que se aplica entre los espacios $X$ y $\ell^\infty(X)$) y del hecho de que en familias equicontinuas coinciden la topología de convergencia puntual y la topología de convergencia puntual sobre un subconjunto denso (teorema de Ascoli-Arzelá, véase la lección 6.1). □

## Lección 5.6 Sucesiones básicas en espacios de Banach.

- Definición de sucesión básica. Caracterización.
- Caracterización de las bases en espacios de Banach. Bases monótonas.
- Bases en $C([0,1])$ y $L^p([0,1])$, $1 \le p < \infty$.
- Técnica de Mazur para generar sucesiones básicas. Existencia de sucesiones básicas en espacios de Banach infinito-dimensionales.

*Descripción.* [Die84, p. 32-39]. Las bases en espacios de Banach son importantes; pero las bases con propiedades adicionales son incluso más importantes. Las sucesiones básicas, sucesiones que son bases en el espacio cerrado generado por ellas mismas, son igualmente importantes, en especial para el estudio general de la estructura de los espacios de Banach. En esta lección realizamos un breve estudio de las sucesiones básicas. El teorema de Banach-Steinhaus nos permite caracterizar las sucesiones básicas en términos del crecimiento de las normas, y así disponer de un criterio útil para determinar si una sucesión total en un espacio de Banach es una base.

**Teorema 5.6.1.** *Sea $(x_n)_n$ una sucesión de vectores no nulos del espacio de Banach $X$. Entonces $(x_n)_n$ es una sucesión básica si, y sólo si, existe una constante $K > 0$ tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \le K \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|,$$

*para cada elección de escalares $(a_k)_k$ y enteros $m < n$.*

Estas consideraciones nos permiten mostrar, como aplicación, que el sistema de Schauder y el sistema de Haar son una base para $C([0,1])$ y $L^p([0,1])$, respectivamente. Finalizamos la lección viendo cómo, a pesar de la solución negativa al problema de la existencia de bases (Enflo), al menos podemos garantizar que en todo espacio de Banach de dimensión infinita siempre hay un subespacio cerrado de dimensión infinita que posee una base, resultado que obtenemos utilizando la técnica de Mazur para generar sucesiones básicas. Esto se fundamenta en el lema siguiente.

**Lema 5.6.2.** *Sea $F$ un subespacio infinito-dimensional de un espacio de Banach $X$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $x \in X$ tal que $|x| = 1$ y*

$$|y| \leq (1+\varepsilon)|y+\lambda x|,$$

*para todo $y \in F$ y todos los escalares $\lambda$.* □

### Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Day73], [Die84], [GG81], [Jam74], [Lim81], [Rud79], [Rud88].

Capítulo 6

# Operadores lineales acotados en espacios de Banach

TEMARIO



Muchas de las definiciones, teoremas y demostraciones concernientes a operadores entre espacios de Hilbert se extienden de manera natural a los operadores entre espacios de Banach. No obstante, las desventajas de los espacios de Banach generales respecto a los espacios de Hilbert, hacen que determinadas cuestiones sobre operadores no puedan ser tratadas de forma similar, como por ejemplo, el estudio de adjuntos, representaciones matriciales de operadores, reducción de ecuaciones de la forma

$$Tx = y$$

a sistemas infinitos de ecuaciones lineales, etc. Por otra parte, el ampliar los espacios base de operadores tiene la contrapartida de que podemos considerar situaciones más generales que en los espacios de Hilbert, y así podremos estudiar ecuaciones integrales en los espacios $L^p$ o sistemas infinitos de ecuaciones en los distintos espacios de sucesiones.

En el presente capítulo estudiamos estas cuestiones, y buena parte de él está dedicado al estudio de operadores compactos, para los cuales desarrollamos la teoría de Riesz-Schauder; ésta constituye, sin duda alguna, uno de los aspectos más relevantes de la teoría de operadores. Aplicamos esta teoría para obtener criterios de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones en las que intervienen operadores compactos, los cuales son conocidos como las alternativas de Fredholm. Finalmente, aplicamos estos criterios al estudio de ecuaciones integrales y sistemas infinitos de ecuaciones lineales.

**Lección 6.1 Operadores lineales acotados en espacios de Banach.**

- Descripción de operadores lineales acotados. Operadores matriciales en espacios de sucesiones. Operadores integrales entre espacios de funciones.
- Recapitulación: el espacio de Banach de los operadores $\mathscr{L}(X,Y)$. Diversas topologías y propiedades de $\mathscr{L}(X,Y)$. Teorema de Ascoli-Arzelá.
- El álgebra de Banach $\mathscr{L}(X)$. Invertibilidad de operadores.
- Aplicaciones: un esquema de aproximación a las soluciones de una ecuación infinita.

*Descripción.* En la lección 4.1 vimos cómo el espacio de operadores lineales acotados entre espacios de Banach puede ser dotado de una norma para la cual éste es de nuevo un espacio de Banach, extendiendo así el resultado que ya conocíamos para espacios de Hilbert. De hecho, muchas de las definiciones, teoremas y demostraciones concernientes a operadores entre espacios de Hilbert se extienden de manera natural para operadores entre espacios de Banach.

La presente lección tiene como objetivo recoger estas extensiones, algunas ya estudiadas aisladamente, y desarrollar aplicaciones concretas para operadores ente espacios de Banach. Damos ejemplos de operadores entre espacios de Banach, exhibiendo condiciones necesarias y suficientes para que operadores definidos por matrices o núcleos integrales lleven un espacio de sucesiones en otro, o un espacio de funciones en otro (por ejemplo, un operador asociado a una matriz infinita $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ define un operador acotado $T:\ell^1 \longrightarrow \ell^1$ si, y sólo si,

$$m = \sup_k \sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}| < \infty,$$

en cuyo caso, $\|T\| = m$, [GG81, p. 211-214]). Vemos también cómo el método iterativo para inversión de operadores nos proporciona un marco adecuado para el estudio de ciertos sistemas infinitos de ecuaciones lineales, lo que nos permite aproximar las soluciones de éstos mediante las soluciones de los sistemas finitos truncados, de forma similar a como hicimos en la lección 2.2 para sistemas de ecuaciones en $\ell^2$.

**Teorema 6.1.1.** *Dado el sistema de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas*

$$\begin{array}{rcl} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots & = & y_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots \end{array} \tag{6.1}$$

*donde* $(y_1, y_2, \ldots) \in \ell^1$*, supongamos que*

$$\sup_k \sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}| < 1, \ \textit{donde } a_{jk} = \delta_{jk} - c_{jk}.$$

*Entonces, el sistema* (6.1) *tiene una única solución* $(\xi_1,\xi_2,\ldots) \in \ell^1$. *Además, para cada entero positivo n, el sistema finito*

$$\begin{array}{rcl} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n & = & y_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n & = & y_n \end{array} \tag{6.2}$$

*tiene una única solución* $(x_1^{(n)},\ldots,x_n^{(n)})$, *y* $(x_1^{(n)},\ldots,x_n^{(n)},0,0,\ldots)$ *converge en* $\ell^1$ *hacia* $(\xi_1,\xi_2,\ldots)$.

Desde un punto de vista más teórico, la lección se completa con el análisis de diversas topologías en espacios de operadores: de convergencia puntual, de convergencia puntual en subconjuntos densos, asociada a la norma de operadores, etc. Se presta atención al teorema de Ascoli-Arzelá (ya utilizado en la lección 5.5), el cual establece que sobre conjuntos uniformemente acotados en $\mathscr{L}(X,Y)$ (*i.e.*, equicontinuos), las topologías de convergencia puntual, puntual en un subconjunto denso de $X$ y de convergencia uniforme sobre compactos de $X$ coinciden, [Sch71, p. 85]. □

**Lección 6.2 Adjunto de un operador lineal acotado.**

- Noción de adjunto. Ejemplos de cálculo de adjuntos.
- Relación entre la noción de adjunto en espacios de Banach y en espacios de Hilbert.
- Propiedades de los adjuntos. Isomorfismo isométrico de $\mathscr{L}(X,Y)$ en $\mathscr{L}(Y^*,X^*)$. Extensión a los biduales: operador bitranspuesto.
- Rango y núcleo de un operador y su adjunto.
- El teorema del Rango Cerrado de Banach.

*Descripción.* Correspondiente a la noción de adjunto de un operador en un espacio de Hilbert, introducimos en esta lección el concepto de adjunto o traspuesto de un operador entre espacios de Banach. El teorema de Riesz nos permitió, en la lección 2.3, definir el adjunto de un operador $T$ entre los espacios de Hilbert $H_1$ y $H_2$ como un operador entre $H_2$ y $H_1$. En el caso de espacios de Banach, el adjunto está definido entre los espacios duales, y se preservan muchas de las propiedades que hemos estudiado para espacios de Hilbert, con las modificaciones oportunas. Frecuentemente, se puede ganar información para un operador conociendo su adjunto, con el cual puede ser más sencillo trabajar. Así, por ejemplo, para saber si un operador tiene imagen densa, es suficiente conocer si su adjunto es inyectivo; en otro sentido, un operador es biyectivo si, y sólo si, el rango de su adjunto es débil$^*$-denso. El teorema del Rango Cerrado, como se comenta en [Con85, p. 169], «*es un resultado útil que no parece ser muy conocido para algunas partes de la comunidad matemática*», véase también [Rud79, p. 96-98].

**Teorema 6.2.1 (Teorema del Rango Cerrado).** *Sean $X$ e $Y$ espacios de Banach y $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. Entonces, cada una de las tres condiciones siguientes implica las otras dos:*

*(i)* $T(X)$ *es cerrado en* $Y$.
*(ii)* $T^*(Y^*)$ *es débilmente*$^*$*-cerrado en* $X^*$.
*(iii)* $T^*(Y^*)$ *es cerrado en la topología de la norma de* $X^*$.

El teorema del Rango Cerrado se basa en el siguiente lema, [Rud79, p. 95]: *sean $B_X$ y $B_Y$ las bolas unitarias de los espacios de Banach $X$ e $Y$, respectivamente, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ y $c > 0$. Si la adherencia de $T(B_X)$ contiene a $cB_Y$, entonces $T(B_X) \supset cB_Y$.* Un momento de reflexión es suficiente para convencerse de que este lema puede deducirse de forma inmediata a partir de la propiedad fundamental de los conjuntos CS-cerrados estudiados en la lección 5.3. Una consecuencia del teorema del Rango Cerrado es que si $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, entonces $T(X) = Y$ si, y sólo si,

$$\|T^* y^*\| \geq c\|y^*\|$$

para una cierta constante $c > 0$ y toda forma lineal $y^* \in Y^*$, [Rud79, p. 98] y [Lim81, p. 107-108]. El teorema del Rango Cerrado de Banach constituye una herramienta muy útil para estudiar la resolubilidad de las ecuaciones de la forma $Tx = y$, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, vía el operador adjunto $T^*$. □

**Lección 6.3 Espectro de un operador lineal acotado.**

- Espectro, resolvente y radio espectral de un operador acotado.
- Propiedades básicas del espectro de un operador acotado.
- Otras nociones espectrales. Valores propios, valores propios aproximados. Propiedades.
- Cálculo de espectros para diversos operadores.
- Teorema de Gel'fand-Mazur.
- La fórmula del radio espectral.

*Descripción.* La teoría espectral que hemos desarrollado para espacios de Hilbert nos ha resultado especialmente útil para el estudio de ecuaciones integrales, problemas diferenciales, etc. En esta lección empezamos a estudiar las distintas nociones espectrales para operadores entre espacios de Banach. El espectro de un operador $T$ en el espacio de Banach $X$ está formado por los escalares $\lambda$ para los que $(T - \lambda I)$ no es inversible. Analizamos las diversas razones por las que un escalar puede estar en el espectro de un elemento, introduciendo así los conceptos de valor y vector propios y el concepto de valor propio aproximado ($\lambda$ es un valor propio aproximado de $T$ si existe una sucesión $(x_n)_n$ tal que $\|x_n\| = 1$, para $n = 1,2,\ldots$, y $\|T(x_n) - \lambda x_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$).

El análisis de algunos ejemplos concretos nos ayuda a diferenciar entre el conjunto de autovalores, autovalores aproximados y valores espectrales, tarea para la que resulta especialmente útil el concurso del teorema de la gráfica cerrada, puesto que para detectar si $(T - \lambda I)$ es inversible, es suficiente conocer si es biyectivo, [Lim81, p. 92-98]. Como consecuencia de la fórmula de inversión de Von Neumann,

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \quad \text{para } \|T\| < 1,$$

se tiene que el subgrupo de los operadores invertibles, Isom($X$), es un abierto de $\mathscr{L}(X)$, y que la aplicación de Isom($X$) en $\mathscr{L}(X)$ que a cada $T$ le asigna $T^{-1}$, es continua para la norma en $\mathscr{L}(X)$. Una consecuencia de esto es que el espectro $\sigma(T)$ de todo operador $T \in \mathscr{L}(X)$ es un conjunto cerrado y acotado. Se demuestra el siguiente teorema, [Lim81, p. 98-99]:

**Teorema 6.3.1.** *Sean $X$ un espacio de Banach complejo y $T \in \mathscr{L}(X)$.*

*(i)* ***(Gel'fand-Mazur)*** *El espectro $\sigma(T)$ es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}$ contenido en $B[0, \|T\|]$.*

*(ii)* ***(Fórmula del radio espectral,*** *Gel'fand**)**.*

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \text{lím} \|T^n\|^{1/n}.$$

En la asignatura *Álgebras de Banach*, optativa de Segundo Ciclo de 6 créditos de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Murcia, se establece, en general, el teorema de Gel'fand-Mazur en un álgebra de Banach. □

**Lección 6.4 Operadores compactos entre espacios de Banach.**

- Operadores compactos. Caracterizaciones.
- Propiedades fundamentales. Composición de operadores acotados y operadores compactos. El subespacio cerrado de los operadores compactos.
- Operadores de rango finito y operadores compactos. La propiedad de la aproximación.
- Operadores compactos y sus adjuntos. Teorema de Schauder.

*Descripción.* [Lim81, p. 137-141]. Como en el caso de los espacios de Hilbert, la clase de operadores compactos entre espacios de Banach constituye una clase relevante de operadores, dentro de la que se encuentran numerosos operadores particularmente importantes. En esta lección extendemos el estudio realizado en la lección 2.5 a operadores compactos entre espacios de Banach, viendo que prácticamente todas las propiedades allí estudiadas son válidas en este contexto más general: el conjunto de operadores compactos entre dos espacios de Banach $X$ e $Y$ es un subespacio vectorial estable por composiciones, por la izquierda y por la derecha, con operadores acotados, y cerrado en norma. También probamos el teorema siguiente:

**Teorema 6.4.1 (Schauder).** *Sean $X$ e $Y$ dos espacios de Banach y $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. Entonces, $T$ es compacto si, y sólo si, su adjunto $T^*$ es compacto.*

La demostración del teorema de Schauder está basada en el teorema de Ascoli-Arzelá, véase la lección 6.1, que permite asegurar que la bola dual $B_{Y^*}$ es compacta para la topología de convergencia uniforme sobre compactos de $Y$.

En una línea de ideas diferente, el teorema de Ascoli-Arzelá, otra vez, permite asegurar que si $(x_n)_n$ es una base de Schauder de un espacio de Banach $X$, entonces la familia de las proyecciones sobre la base $\{P_m\}_m$ dadas por $P_m(x) = \sum_n \lambda_n(x)x_n$, para cada $x \in X$, converge uniformemente sobre compactos hacia el operador identidad en $X$ ($\{P_m\}_m$ es un conjunto equicontinuo, véase la lección 5.5). De aquí obtenemos fácilmente que si $Y$ es un espacio de Banach con base de Schauder y $X$ es un Banach cualquiera, entonces todo operador compacto $T : X \longrightarrow Y$ es límite de una sucesión de operadores de rango finito, *i.e.*, $Y$ tiene (como los Hilbert) la propiedad de aproximación. Comentamos que, en general, un operador compacto entre espacios de Banach no tiene por qué ser un límite, en norma de operadores, de una sucesión de operadores de rango finito (ejemplo de Enflo), *i.e.*, que no todo espacio de Banach tiene la propiedad de aproximación. $\square$

**Lección 6.5 Ejemplos de operadores compactos.**

- Operadores multiplicación en los espacios $\ell^p$.
- Caracterización de los operadores matriciales en $\ell^1$ que son compactos.
- Operadores integrales de $C([a,b])$ en $C([a,b])$. El operador de Volterra.
- Operadores integrales de $L^p([0,1])$ en $L^q([0,1])$, $1 \leq p,q < \infty$.
- Operadores nucleares de Grothendieck.

*Descripción.* Como primeros ejemplos de operadores compactos entre espacios de Banach, ya tenemos los operadores de rango finito y los operadores compactos que hemos estudiado en espacios de Hilbert, como por ejemplo los operadores de Hilbert-Schmidt. Nos ocupamos en esta lección de dar ejemplos concretos de operadores compactos entre espacios de sucesiones (operadores multiplicación y operadores matriciales), entre espacios de funciones continuas (operadores integrales, operador de Volterra) y entre espacios de funciones integrables (operadores integrales). Establecemos, entre otros, los siguientes resultados.

**Proposición 6.5.1.** *Sea $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ una matriz de números complejos. Entonces, el operador $T$ definido en $\ell^1$ por $T(\alpha_1,\alpha_2,\dots) = (\beta_1,\beta_2,\dots)$, donde*

$$\beta_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\alpha_k,$$

*es un operador compacto en $\mathscr{L}(\ell^1)$ si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un entero $N$ tal que*

$$\sup_k \sum_{j>N} |a_{jk}| < \varepsilon.$$

**Proposición 6.5.2.** *Dados* $p,q$ *con* $1 < p,q < \infty$*, sea* $k \in L^r([a,b] \times [a,b])$*, donde* $r = \text{máx}(p',q)$ *y* $1/p + 1/p' = 1$*. Entonces, el operador (con núcleo k) dado por la fórmula*

$$Kf(t) := \int_a^b k(t,s)\, f(s)\, ds$$

*es un operador compacto de* $L^p([a,b])$ *en* $L^q([a,b])$*.*

Finalizamos la lección señalando, como ejemplo relevante de operadores compactos, los operadores nucleares de Grothendieck, que han dado lugar a toda una teoría en espacios de Banach y en espacios localmente convexos, véase [Pie72, p. 49-68]: un operador $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ es nuclear si existen sucesiones $(x_n^*)_n$ en $X^*$ e $(y_n)_n$ en $Y$ tales que

$$\begin{aligned} &\sum_n \|x_n^*\|\,\|y_n\| < \infty, \\ &Tx = \sum_n x_n^*(x) y_n, \end{aligned} \tag{6.3}$$

para cada $x \in X$. La norma nuclear de $T$ se define por $\|T\|_{\text{nuc}} := \inf\{\sum_n \|x_n^*\|\,\|y_n\|\}$, donde el ínfimo está tomado sobre todas las sucesiones $(x_n^*)_n$ en $X^*$ e $(y_n)_n$ en $Y$ que satisfacen la igualdad (6.3). El conjunto de los operadores nucleares $\mathscr{N}(X,Y)$ es un ideal en $\mathscr{L}(X,Y)$; con la norma nuclear, $\mathscr{N}(X,Y)$ es un espacio de Banach, y la topología asociada a la norma nuclear es más fina que la topología asociada a la norma de operadores.

Se acaba la lección comentando cómo, con el concurso de los operadores nucleares y los operadores 1-sumantes (la composición de dos operadores 1-sumantes es nuclear), se puede dar una elegante demostración del teorema de Dvoretzky-Rogers, el cual caracteriza los espacios de Banach de dimensión finita como aquéllos en los que las series incondicionalmente convergentes son absolutamente convergentes, [Pie72, p. 67-68] y [Die84, p. 58-63]. □

**Lección 6.6 Espectro de un operador compacto.**

- Núcleo y rango de $T - \lambda I$, para $T$ un operador compacto.
- Valores espectrales no nulos de un operador compacto como valores propios.
- Numerabilidad del espectro de un operador compacto.
- Relación del espectro de un operador compacto con el espectro de su adjunto.
- Teoría de Riesz-Schauder: Alternativa de Fredholm en espacios de Banach.
- Un esquema de aproximación a soluciones de ecuaciones de la forma $(T - \lambda I)x = y$.
- Ejemplos. El operador de Volterra.

*Descripción.* Para un operador compacto autoadjunto o, más en general, compacto normal en un espacio de Hilbert, vimos en las lecciones 3.3 y 3.6 que el conjunto de autovalores es un conjunto numerable, cuyo único punto de aglomeración es, quizás, el cero. La presentación que hicimos de estos resultados estaba basada en el teorema de la proyección ortogonal. Al estudiar el espectro de un operador compacto en un espacio de Banach, no disponemos de proyecciones ortogonales, pero sí de proyecciones *casi ortogonales*. Haciendo uso de éstas (véase el lema de Riesz en la lección 4.3), desarrollamos en esta lección la teoría de Riesz-Schauder para operadores compactos en espacios de Banach. La situación para los operadores compactos en los espacios de Banach no es tan placentera como la situación estudiada para los operadores compactos normales en los espacios de Hilbert donde todo encajaba perfectamente. ahora lo que se puede demostrar es el siguiente resultado, [Rud79, p. 104-107]:

**Teorema 6.6.1.** *Sean $X$ un espacio de Banach, $T \in \mathscr{L}(X)$, y supongamos que $T$ es compacto.*

*(i) Si $\lambda \neq 0$, entonces $\ker(T-\lambda I)$ es finito-dimensional y $(T-\lambda I)(X)$ es un subespacio cerrado en $X$. Además, los cuatro números*

$$\begin{aligned}&\dim \ker(T-\lambda I),\\ &\dim X/(T-\lambda I)(X),\\ &\dim \ker(T^*-\lambda I),\\ &\dim X^*/(T^*-\lambda I)(X^*),\end{aligned}$$

*son iguales y finitos.*

*(ii) Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \in \sigma(T)$, entonces $\lambda$ es un valor propio de $T$ y de $T^*$.*

*(iii) El espectro $\sigma(T)$ es compacto, a lo sumo, numerable, y tiene, como máximo, un punto de acumulación: el 0.*

El resultado anterior conduce fácilmente a lo que se denomina las *«Alternativas de Fredholm»* para operadores compactos en espacios de Banach (extensión de los bien conocidos resultados de álgebra lineal para la resolución de sistemas finitos de ecuaciones lineales), véanse [GG81, p. 242-245] y [Lim81, p. 153-160]. Una de las alternativas que encierra el teorema 6.6.1 es la siguiente:

**Teorema 6.6.2 (Alternativa de Fredholm I).** *Sean $\lambda \neq 0$ y $T \in \mathscr{L}(X)$ un operador compacto. Entonces se verifica, exactamente, una de las dos alternativas que siguen:*

*(i) Para cada $y \in X$, la ecuación*

$$(T-\lambda I)x = y$$

*tiene una única solución $x \in X$.*

*(ii) Existe una solución no nula del sistema homogéneo asociado*

$$(T-\lambda I)x = 0.$$

*Si ocurre la alternativa segunda, entonces el número máximo de soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo asociado es finito.*

En la lección siguiente se dan aplicaciones de las Alternativas de Fredholm. Esta lección se complementa con una serie de ejemplos en los que se delimita el papel del cero como valor espectral para operadores compactos, entre los cuales estudiamos el clásico operador de Volterra: probamos que el operador $T \in L^2([0,1])$ definido por

$$Tf(t) := \int_0^t k(t,s)f(s)\,ds, \quad 0 \le t \le 1,$$

tiene al 0 como único valor espectral, [Lim81, p. 150-151]. □

**Lección 6.7 Ecuaciones integrales.**

- Ecuaciones integrales de Fredholm. Existencia y unicidad de soluciones.
- Núcleos degenerados. Soluciones de ecuaciones integrales con núcleos degenerados.
- Aproximación de las soluciones de ecuaciones de Fredholm. Estimación del error.
- Ejemplos.

*Descripción.* En esta lección estudiamos ecuaciones integrales del siguiente tipo:

$$x(t) - \lambda \int_0^1 k(t,s)x(s)\,ds = y(t), \quad 0 \le t \le 1, \qquad \text{en } L^2([0,1]) \text{ o en } C([0,1]). \tag{6.4}$$

Si $\lambda = 0$, la ecuación tiene una única solución, a saber, $x = y$. Cuando la norma del núcleo es menor que $1/|\lambda|$, el método iterativo para inversión de operadores nos permite asegurar la existencia y unicidad para las soluciones, dando éstas a través de una fórmula integral en la que intervienen los núcleos iterados. En el caso de ecuaciones en $L^2([0,1])$, y bajo la condición

$$k(t,s) = \overline{k(s,t)}$$

para casi todo punto, la teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert nos permitió dar las soluciones explícitas de una ecuación de este tipo a través de series en las que intervenían los vectores y valores propios del operador compacto autoadjunto asociado a la ecuación, véase el teorema 3.3.2.

Aquí discutimos, vía las alternativas de Fredholm, la existencia y unicidad de las soluciones de ecuaciones de este tipo, en general.

**Teorema 6.7.1.** *Sea $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$ y sea $\lambda \neq 0$.*

*(i) Se verifica, exactamente, una de las siguientes alternativas:*

*(a) Para cada $y \in L^2([0,1])$, la ecuación integral* (6.4) *tiene una única solución para cada $x \in L^2([0,1])$.*

*(b) La ecuación homogénea*

$$x(t) - \lambda \int_0^1 k(t,s)\,x(s)\,ds = 0, \quad p.c.t.\ t \in [0,1],$$

*tiene una solución no nula.*

*Si ocurre la alternativa segunda, entonces el número máximo de soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo asociado es finito.*

*(ii) Existe $x \in L^2([0,1])$, $x \neq 0$, tal que*

$$x(t) - \lambda \int_0^1 k(t,s)\,x(s)\,ds = 0, \quad p.c.t.\ t \in [0,1],$$

*si, y sólo si, existe $z \in L^2([0,1])$, $z \neq 0$, tal que*

$$z(t) - \lambda \int_0^1 k(s,t)\,z(s)\,ds = 0, \quad p.c.t.\ t \in [0,1].$$

*Además, el numero máximo (necesariamente finito) de soluciones linealmente independientes de las dos ecuaciones es el mismo.*

*(iii) La ecuación* (6.4) *tiene solución para aquellas funciones $y \in L^2([0,1])$ que satisfacen*

$$\int_0^1 y(t)z(t)\,dt = 0,$$

*cuando*

$$z(t) - \lambda \int_0^1 k(t,s)\,z(s)\,ds = 0, \quad p.c.t.\ t \in [0,1].$$

Un núcleo degenerado es un núcleo de la forma $k(t,s) = \sum_{i=1}^m a_i(t)b_i(s)$, $a_i,b_i \in L^2([0,1])$. La ecuación (6.4) para un núcleo degenerado se resuelve encontrando las soluciones de un sistema lineal con un número finito de ecuaciones e incógnitas. Todo núcleo $k \in L^2([0,1]\times[0,1])$ se aproxima por núcleos degenerados, y las soluciones de las ecuaciones integrales asociadas a estos últimos aproximan a las soluciones de la ecuación (6.4), siendo posible dar una estimación del error que se comete al sustituir una solución por su solución aproximada.

Observamos que, si $k \in C([0,1]\times[0,1])$, los resultados en el teorema anterior son ciertos cuando se reemplaza $L^2([0,1])$ por $C([0,1])$. La lección se complementa con el estudio de ecuaciones integrales para núcleos concretos. $\square$

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Con85], [Die84], [GG81], [Lim81], [Pie72], [Rud79], [Sch71], [Yos80].

# Parte VI

# Espacios Localmente Convexos

# Espacios Localmente Convexos

| | |
|---|---|
| Código: | **5A2** |
| Nombre: | **Espacios localmente convexos** |
| Descripción BOE: | **Espacios Localmente Convexos** |
| Tipo: | **Optativa (Segundo ciclo)** |
| Créditos: | **6 (4T + 2P)** |
| Duración: | **Cuatrimestral** |
| Contenidos: | **7 capítulos** |

El material que se presenta corresponde a un curso (o varios distintos, dado que distintas elecciones son posibles) de ampliación de la asignatura *Análisis Funcional*. Los *Espacios Localmente Convexos* pasaron de un gran apogeo (alrededor de la teoría de distribuciones, contribuciones de Grothendieck, etc.) a no estar bien considerados en determinados círculos. Esto se debió fundamentalmente a que, a partir de un momento, la teoría dejó de aportar resultados realmente novedosos y clarificadores, y quienes investigaban y publicaban en torno a estas cuestiones producían nuevas clases y subclases de espacios, generalizaciones por generalizar, resultados poco profundos sin aplicaciones reales, etc. Esto es un mal común en otras muchas áreas de las matemáticas hoy en día, y el tiempo eliminará de estas áreas, como lo ha hecho en la teoría de *Espacios Localmente Convexos*, lo que es producido sin mayor miramiento que la producción misma.

¿Por qué entonces una asignatura de *Espacios Localmente Convexos*? La principal razón es que esta asignatura es una ampliación de la correspondiente de *Análisis Funcional*, donde se profundiza en las técnicas estudiadas en esta última, teniendo ahora como denominador común los espacios localmente convexos; éstos proporcionan estructuras de clasificación de objetos, en forma similar a cómo los espacios de Hilbert y de Banach presiden la asignatura de *Análisis Funcional*. Por un lado, aislaremos las propiedades vectoriales-topológicas que están presentes en la convivencia de las topologías de espacios de Hilbert y espacios de Banach, y clasificaremos objetos más generales: topologías débiles, espacios de funciones continuas $C(X)$ y $C_b(X)$, funciones integrables $L^1(\mu)$ con topologías como la de convergencia en medida, funciones holomorfas $\mathscr{H}(\Omega)$, funciones diferenciables $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{D}^k(\Omega)$, $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{E}^k(\Omega)$, distribuciones $\mathscr{D}'(\Omega)$, etc. Por otro lado, este estudio más avanzado, si es bien llevado, permite aislar las ideas genuinas que hacen que los teoremas de separación de conjuntos convexos sean ciertos, o las que sirven, por ejemplo, para demostrar que el teorema de la Gráfica Cerrada se satisface entre espacios de distribuciones $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Libros clásicos como [Rud79] y [Kho72] abogan por la presentación de los *Espacios Localmente Convexos* como preámbulo para la teoría de distribuciones y sus aplicaciones al estudio de operadores en derivadas parciales. Libros modernos como [FHH$^+$01], actualmente utilizados como libros de texto en universidades americanas, defienden el uso de los espacios localmente convexos para exponer, de forma sistemática y elegante, la teoría de dualidad en espacios de Banach.

Al igual que hacemos en otras asignaturas, introduciremos al alumno en esta materia a través de ejemplos concretos para, a partir de ahí, llegar a una teoría elegante que aísle las ideas, la cual se aplicará de nuevo a situaciones concretas que proporcionen nuevos e importantes ejemplos. Nos parece esencial en nuestra metodología presentar y repetir las ideas de forma cíclica, tal y como se ha expuesto más arriba: empezando por ejemplos que motiven la teoría que se formula, y terminando con la exposición de nuevos ejemplos que ayudan a sedimentar las ideas expuestas.

## Objetivo de la asignatura

Es imposible explicar el material que se presenta en un curso de 6 créditos. Sí es posible, sin embargo, hacer distintas elecciones para alcanzar, en los seis créditos, los distintos objetivos generales que se listan debajo:

*Curso general* *Capítulos: 1, 2, 3, 4, 5.*

- Clasificar los espacios localmente convexos según su comportamiento respecto a los tres Principios Fundamentales del Análisis Funcional.

*Orientado a la interacción Topología y Análisis* *Capítulos: 1, 2, 3, 6.*

- Conocer los fundamentos de los espacios localmente convexos.
- Conocer y manejar teoremas de representación integral y sus aplicaciones. Estudiar espacios clásicos de funciones y la interacción entre las topologías de los espacios subyacentes y las de los espacios de funciones asociados.

*Orientado a las distribuciones* *Capítulos: 1, 2, 3, y parte del 4 y 7.*

- Conocer los fundamentos de los espacios localmente convexos.
- Conocer los espacios de distribuciones como herramientas.

## Contenido

Hemos estructurado la asignatura en los siete capítulos que siguen:



El capítulo 1 recoge los resultados generales sobre espacios vectoriales topológicos, tratando las descripciones habituales de éstos a través de bases de entornos del origen, uniformidades y $F$-seminormas. Los espacios localmente convexos hacen su aparición en el capítulo 2. La validez del teorema de Hahn-Banach es lo que hace a los espacios localmente convexos superiores a las otras clases de espacios vectoriales topológicos. En este capítulo discutimos los principales aspectos de esta clase de espacios, centrando nuestra atención en los distintos conceptos de completitud, la generación de nuevos espacios mediante topologías proyectivas e inductivas, las clases distinguidas de subconjuntos, etc. Así mismo, introducimos y estudiamos las propiedades que, en este contexto, tienen los diversos espacios de funciones continuas y espacios base para la teoría de las distribuciones. La teoría de dualidad es desarrollada en el capítulo 3, en el cual se examinan las topologías débiles, las topologías definidas por familias saturadas de conjuntos acotados, las construcciones básicas de la formación de polares y bipolares, etc. Entre otros, se demuestran los teoremas de Alaoglu-Bourbaki, Banach-Mackey, Mackey, Mackey-Arens, Grothendieck y Banach-Dieudonné. Las diferentes clases de espacios localmente convexos son estudiadas en el capítulo 4. La clasificación de éstos respecto al principio de la Acotación Uniforme nos lleva a la introducción de la clase de los espacios tonelados, la cual se presenta, a su vez, como clase maximal de espacios localmente convexos para los que es válido el teorema de la Gráfica Cerrada cuando se toman los espacios de Banach como espacios de llegada. La clasificación de espacios localmente convexos según su comportamiento respecto al teorema de la Gráfica Cerrada es estudiada en el capítulo 5, donde llevamos los resultados establecidos en la asignatura *Análisis Funcional* para espacios de Banach, al caso de espacios de Baire y espacios de De Wilde, tras haber seguido, digámoslo así, un proceso de aproximaciones sucesivas que ilustran el desarrollo histórico de este tema. Abordamos, de forma no habitual, el estudio de los teoremas de gráfica boreliana de Schwartz, reduciendo éstos, en parte, a los teoremas de gráfica cerrada de De Wilde en el caso de espacios localmente completos. El capítulo 6 contiene los resultados más sobresalientes concernientes a conjuntos convexos. En una primera parte del capítulo probamos, dando distintas aplicaciones, el teorema de Krein-Milman y el teorema de representación integral de Choquet. La segunda parte recoge los teoremas de Grothendieck, Eberlein-Grothendieck, Šmulian, Eberlein-Šmulian y Krein, relativos a compacidad en espacios de funciones continuas y compacidad débil en espacios localmente convexos, para los que se han elegido como método de prueba los teoremas de intercambio de límite y accesibilidad por sucesiones de Grothendieck y De Wilde, respectivamente. En el último capítulo de esta memoria se presenta una introducción a la teoría de distribuciones. El análisis de esta teoría constituye un ejercicio continuado de los métodos de dualidad y trasposición estudiados en el capítulo 3. Entre otros temas, estudiamos la derivación, convolución y producto tensorial de distribuciones, y unas primeras cuestiones sobre la transformación de Fourier y los espacios de Sobolev.

## Objetivos concretos

*Introducir* los conceptos básicos y entender las descripciones habituales de las topologías vectoriales a través de bases de entornos del origen y de uniformidades.

*Extender* los conceptos de acotación, precompacidad y compacidad al contexto de los espacios vectoriales topológicos.

*Aprender* a generar nuevas topologías por métodos proyectivos e inductivos.

*Delimitar* el alcance de la teoría de espacios vectoriales topológicos, manipulando numerosos ejemplos y contraejemplos.

*Entender* la relación existente entre entornos convexos y seminormas.

*Utilizar* el teorema de Hahn-Banach para estudiar los espacios localmente convexos.

*Manipular* espacios localmente convexos concretos: espacios de funciones continuas, espacios base para la teoría de distribuciones, etc.

*Definir* las topologías débiles relativas a un par dual como extensión de las topologías débiles ya estudiadas para espacios de Banach.

*Calcular* polares y bipolares en pares duales concretos.

*Establecer* los resultados básicos que caracterizan las topologías compatibles con un par dual y el carácter de los acotados en todas ellas.

*Estudiar*, y discutir mediante ejemplos, las topologías de convergencia uniforme sobre familias distintas en espacios de aplicaciones lineales.

*Analizar* la dualidad de aplicaciones lineales y la dualidad entre topologías proyectivas y topologías inductivas.

*Utilizar* los recursos aprendidos acerca de topologías de convergencia uniforme sobre familias de acotados en espacios de aplicaciones lineales, para hacer un estudio pormenorizado del modelo de Grothendieck para la complección de un espacio localmente convexo.

*Estudiar* los espacios localmente convexos según su comportamiento respecto al Principio de la Acotación Uniforme y respecto a la propiedad de Heine-Borel.

*Clasificar* todos los ejemplos que hacen importante la teoría, $C(X)$, $C_b(X)$, $\mathscr{H}(\Omega)$, $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{D}^k(\Omega)$, $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{E}^k(\Omega)$, $\mathscr{D}'(\Omega)$, etc., desde el punto de vista del apartado anterior.

*Obtener* un teorema de gráfica cerrada que sirva para el espacio de distribuciones $\mathscr{D}'(\Omega)$.

*Estudiar* los teoremas de Krein-Milman y Krein-Šmulian, tanto en sus versiones infinito como finito-dimensionales (teorema de Minkowski). Establecer la equivalencia entre el teorema de Krein-Milman y otros principios de optimización, como el Principio del Máximo de Bauer.

*Ligar* el teorema de Krein-Milman con problemas de aproximación y *tests* de convergencia débil.

*Aprender* técnicas que nos permitan reconocer en qué tipos de espacios sus compactos tienen un comportamiento sucesional.

*Formalizar* el concepto de distribución de Schwartz.

*Aprender* las reglas de manipulación de distribuciones: derivación, convolución, traslaciones, etc.

*Presentar* los espacios de Sobolev como marco adecuado para estudiar algunos problemas de ecuaciones en derivadas parciales.

## Prerrequisitos

La asignatura se hará de la forma más autocontenida posible. Partimos de que el alumno ha cursado la asignatura troncal *Análisis Funcional*, y por ende, tiene cubiertos todos los prerrequisitos que, para esta última asignatura, escribíamos en la página 137.

## Bibliografía seleccionada

☞ M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant, and V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, vol. 8, Springer-Verlag, New York, 2001. MR 2002f:46001.

☞ H. Jarchow, *Locally convex spaces*, Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks], B. G. Teubner, Stuttgart, 1981. MR 83h:46008.

☞ G. Köthe, *Topological vector spaces I*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969, Translated from the German by D. J. H. Garling. MR 40 #1750.

☞ K. Vo-Khac Khoan, *Distributions, analyse de Fourier, operateurs aux derivées partielles*, vol. I, Vuibert, Paris, 1972.

Capítulo 1

# Espacios vectoriales topológicos

**TEMARIO**



El propósito de este capítulo es introducir al alumno en la teoría de los espacios vectoriales topológicos. Hay muchas ramas del Análisis Funcional que están basadas en esta teoría, la cual constituye, por ejemplo, la base de la teoría de las distribuciones y del estudio de las diversas topologías sobre los espacios de funciones continuas. Además, la teoría de los espacios vectoriales topológicos clarifica a menudo los resultados de la teoría de los espacios de Banach, especialmente los concernientes a la topología débil, los cuales se pueden mirar como casos particulares de otros resultados más generales en el contexto de los espacios vectoriales topológicos.

En este capítulo introducimos los conceptos básicos y damos las descripciones habituales de las topologías vectoriales a través de bases de entornos del origen y de uniformidades. A continuación, discutimos brevemente los conceptos de acotación, precompacidad y compacidad en este contexto, y consideramos topologías proyectivas como un primer método general para generar nuevas topologías vectoriales a partir de otras dadas. Estudiamos cómo espacios con bases de entornos del origen con propiedades particulares son espacios de dimensión finita, espacios quasi-normados, espacios $p$-normados, etc., dando, en general, la contrapartida analítica para generar topologías vectoriales a partir de familias de $F$-seminormas, y completando el capítulo con ejemplos y contraejemplos que delimitan, precisamente, los diversos objetos introducidos.

**Lección 1.1 Conceptos básicos y propiedades generales.**

- Recordatorio: la topología débil de un espacio normado. La topología de convergencia uniforme sobre compactos del espacio de funciones holomorfas $\mathscr{H}(\Omega)$.
- Definición de espacio vectorial topológico (e.v.t.). Primeras propiedades. Aplicaciones lineales continuas.
- Bases de entornos del origen para una topología vectorial. Regularidad de los espacios vectoriales topológicos.
- Descripción de una topología vectorial a través de bases de entornos del origen.

*Descripción.* [Köt69, p. 144-148] y [Jar81, p. 30-34]. La topología débil de un espacio normado y la topología de convergencia uniforme sobre compactos del espacio de funciones holomorfas $\mathscr{H}(\Omega)$ tienen dos propiedades en común: a) Ambas hacen continuas las operaciones de espacio vectorial sobre el que están definidas. b) Ninguna de ellas (normado de dimensión infinita) es la topología asociada a una norma. Estos dos ejemplos, al igual que otros muchos, están enmarcados en el contexto general de las topologías vectoriales que serán, a partir de ahora, nuestro objeto de estudio. Un espacio vectorial topológico es un espacio vectorial dotado de una topología que hace continuas las operaciones de espacio vectorial. En esta lección estudiamos estos nuevos objetos, haciendo especial énfasis en la equivalencia entre topologías vectoriales y bases de filtro $\mathscr{B}$ formadas por conjuntos absorbentes y equilibrados, con la propiedad de que para cada $U \in \mathscr{B}$ exista un $V \in \mathscr{B}$ tal que $V + V \subset U$. □

**Lección 1.2 Uniformidad asociada a una topología vectorial.**

- Uniformidad asociada a una topología vectorial.
- Conceptos uniformes en espacios vectoriales topológicos: continuidad uniforme, redes de Cauchy, conjuntos precompactos.
- Espacios vectoriales topológicos completos. Complección de un e.v.t. Un teorema de Robertson-Bourbaki.

*Descripción.* [Köt69, p. 147-148, 210]. La existencia de una única uniformidad invariante por traslaciones, de la que puede derivarse la topología de un e.v.t., es de una importancia considerable en la teoría de estos espacios (como lo es también en la teoría de los grupos topológicos), ya que los conceptos relativos a la uniformidad pueden aplicarse de modo inequívoco sin más que conocer la topología del espacio en cuestión. Se puede así hablar, en este contexto, de continuidad uniforme, redes y filtros de Cauchy, completitud del espacio, completitud de subconjuntos, conjuntos precompactos, etc. Los e.v.t. están abiertos a la aplicación de los resultados de la teoría general de los espacios uniformes. Por ejemplo, utilizando la complección de un espacio uniforme, se prueba que todo e.v.t. puede ser sumergido de forma densa en otro e.v.t. completo que es único salvo isomorfismos, *i.e.*, que todo e.v.t. puede ser completado. El teorema de Robertson-Bourbaki relaciona las redes convergentes en una topología con las redes de Cauchy en determinadas topologías más finas; por sus aplicaciones (lección 1.3 y lección 1.5), este teorema es una herramienta esencial en el estudio de la completitud en e.v.t. □

**Lección 1.3 Subconjuntos notables de un espacio vectorial topológico.**

- Subconjuntos acotados. Caracterización y operaciones con ellos. Ejemplos.
- Subconjuntos precompactos. Caracterización y operaciones con ellos. Los precompactos como subconjuntos de la complección. Coincidencia de topologías $F$-ligadas sobre conjuntos precompactos. Ejemplos.
- Subconjuntos compactos. Caracterización y operaciones con ellos. Ejemplos.

*Descripción.* [Köt69, p. 152-155] y [Jar81, p. 64-65]. En la teoría de e.v.t. tienen un lugar preferencial las clases de conjuntos acotados, conjuntos precompactos y conjuntos compactos. En esta lección nos ocupamos de tales conceptos, dando diversas caracterizaciones y estudiando las propiedades de estabilidad de estas clases de conjuntos por las operaciones lineales y conjuntistas habituales. Por definición, en un espacio normado, un conjunto es acotado si está contenido en algún múltiplo escalar de la bola unidad. La noción equivalente en un e.v.t. es clara: un conjunto se dirá acotado si está contenido en algún múltiplo escalar de cada entorno del origen. La clase de los subconjuntos precompactos de un e.v.t. es una subclase relevante de la clase de los subconjuntos acotados. El concepto de precompacidad es un concepto uniforme (véase la lección anterior) y, como su propio nombre indica, es una noción ligada a la de compacidad. De hecho, establecemos que un subconjunto de un e.v.t. es precompacto si, y sólo si, es relativamente compacto en la complección del e.v.t. Dos propiedades se derivan de este resultado: la primera, consecuencia del teorema de Robertson-Bourbaki, establece que dos topologías $F$-ligadas en el sentido de Wilanski coinciden sobre los subconjuntos precompactos de la topología más fina; la segunda caracteriza la compacidad: en un e.v.t. un subconjunto es compacto si, y sólo si, es precompacto y completo. □

**Lección 1.4 Generación de nuevos espacios.**

- Topologías proyectivas. Caracterización de la continuidad y de los acotados. Subespacios, productos y supremos.
- Variedades lineales. Hiperplanos y formas lineales continuas. Espacio dual.
- Cocientes. Sumas directas. Complementación.

*Descripción.* [Köt69, p. 149-151] y [Jar81, Capítulos 2 y 4]. La vinculación entre la estructura lineal y la estructura topológica de los e.v.t. posibilita conjugar las operaciones de espacios vectoriales con las operaciones de espacios topológicos, pudiéndose así efectuar operaciones con e.v.t.

cuyo resultado sea de nuevo un e.v.t. El poder de generación de nuevos espacios a partir de otros ya conocidos vía estas operaciones es tan grande que, partiendo, por ejemplo, de la clase de e.v.t. metrizables, realizando con ellos productos y tomando subespacios, se obtiene toda la clase de los e.v.t. Otro tanto ocurre con los espacios de Banach y los espacios localmente convexos. □

**Lección 1.5 Espacios vectoriales topológicos de dimensión finita.**

- Isomorfismos entre e.v.t. de la misma dimensión finita. Suma de un subespacio cerrado y un subespacio finito dimensional.
- Subespacios de codimensión finita: complementación.
- Caracterización topológica de los e.v.t. de dimensión finita: espacios localmente precompactos.

*Descripción.* [Köt69, p. 151-152], [Cho69b, p. 294-295, Vol I] y [Rud79, p. 13-15]. El resultado establecido en la asignatura *Análisis Funcional* que asegura que todos los espacios normados de la misma dimensión finita son isomorfos, se extiende aquí al contexto de los e.v.t.: cualesquiera dos e.v.t., $E$ y $F$, de la misma dimensión finita, $n$, son isomorfos; más aún, cualquier isomorfismo algebraico de $\mathbb{K}^n$ (producto de $n$ copias del cuerpo) sobre $E$ es un isomorfismo topológico. De aquí se sigue que, en un e.v.t., todo subespacio cerrado de codimensión finita tiene complemento topológico, y que la suma de un subespacio cerrado y un subespacio de dimensión finita es de nuevo un subespacio cerrado. También el teorema de Riesz que ya conocíamos para espacios normados de la asignatura *Análisis Funcional* se extiende a esta situación, y se establece que los e.v.t. de dimensión finita son, precisamente, los que tienen algún entorno precompacto del origen. □

**Lección 1.6 Espacios localmente acotados.**

- Definición de quasi-norma. Caracterización de los e.v.t. localmente acotados como espacios quasi-normables.
- Entornos del origen $p$-convexos acotados y $p$-normas asociadas. Caracterización de los espacios $p$-normables. El teorema de Kolmogoroff.
- Teorema de Rolewicz: caracterización de los espacios localmente acotados como espacios $p$-normables.

*Descripción.* [Köt69, p. 159-162], [Jar81, Capítulo 6]. En la lección anterior hemos caracterizado los e.v.t. localmente compactos como los e.v.t. de dimensión finita. Cuando cambiamos compacto por acotado la situación es bastante diferente. Un resultado de Hyres-Bourgin establece que un espacio es localmente acotado si, y sólo si, su topología puede derivarse de una quasi-norma. Las $p$-normas, $0 < p \leq 1$, describen la topología de los e.v.t. que tienen un entorno acotado $p$-convexo y, en particular, se tiene la caracterización de los espacios normados como aquellos e.v.t. en los que hay un entorno acotado y convexo del origen. Analizando finamente las propiedades de los entornos acotados de un e.v.t. se prueba, teorema de Rolewicz, que todo e.v.t. localmente acotado es $p$-normable para algún $p \in (0,1]$. □

**Lección 1.7 $F$-seminormas y espacios metrizables.**

- Definición de $F$-seminorma. Topologías vectoriales asociadas a familias de $F$-seminormas.
- $F$-seminormas asociadas a cadenas de subconjuntos. La topología de un e.v.t. descrita a través de una familia de $F$-seminormas.
- Caracterización de los espacios metrizables. Operaciones con ellos. (F)-espacios. Aplicaciones lineales continuas en espacios metrizables.
- Inmersión de un e.v.t. en un producto de espacios metrizables.

*Descripción.* [Köt69, p. 162-166] y [Jar81, p. 38-42]. Hasta ahora hemos visto cómo propiedades particulares de los entornos del origen de un e.v.t. permiten construir funcionales ($p$-normas, quasi-normas, etc.) que describen la topología del espacio en cuestión. En general, no es posible realizar esta construcción a partir de un entorno cualquiera de un e.v.t. Sin embargo, sí es posible, para cada entorno del origen de un e.v.t., construir una cadena de entornos del origen contenida en él, y a ésta, asociarle un funcional que la describe en lo necesario: una $F$-seminorma. Esta idea es la clave para probar que dar una topología vectorial es equivalente a dar una familia de $F$-seminormas. Este hecho tiene varias consecuencias importantes, como por ejemplo: (a) La caracterización de los e.v.t. metrizables como aquéllos cuya topología puede derivarse de una $F$-norma, lo que es equivalente a que se satisfaga el primer axioma de numerabilidad. (b) El hecho de que la categoría de todos los e.v.t. puede generarse a partir de la clase de los e.v.t. metrizables, formando productos y tomando subespacios. □

**Lección 1.8 Algunos ejemplos.**

- Espacios de funciones medibles con la topología de convergencia en medida.
- Los espacios $L^p$ y $\ell^p$, $0 < p < 1$. El espacio $\ell^0$.
- Espacios de funciones diferenciables.

*Descripción.* [Jar81, p. 119-124]. Todos lo ejemplos que presentamos aquí son (F)-espacios, pero de naturaleza bien distinta; lo suficiente como para distinguir entre las clases de e.v.t. $F$-normados, quasi-normados y $p$-normados. Los espacios de funciones medibles con la topología de convergencia en medida proporcionan (F)-espacios que no son espacios quasi-normados (en ellos, ningún entorno del origen propio puede ser $p$-convexo para algún $p \in (0,1]$). Los espacios $L^p$ y $\ell^p$, $0 < p < 1$, son los ejemplos naturales de espacios $p$-normados. Algunas de sus propiedades resultan satisfactorias para delimitar situaciones: así por ejemplo, si $0 < p < 1$, entonces $\ell^p$ es $p$-normado, aunque no es $q$-normado para $1 \geq q > p$. El espacio $\ell^0 = \bigcap_{p>0} \ell^p$, dotado de la topología proyectiva respecto a las inmersiones $\ell^0 \hookrightarrow \ell^p$, es un (F)-espacio que no es quasi-normado; puede mostrase, sin embargo, que $\ell^0$ tiene una base de entornos del origen formada por conjuntos $r$-convexos ($r \in (0,1]$ variable), mientras que no tiene ninguna base de entornos del origen formada por conjuntos $p$-convexos, para $p \in (0,1]$ fijo. Finalmente, el espacio $\mathscr{E}(\Omega)$ de las funciones infinitamente diferenciables en un abierto $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$, dotado con la topología de convergencia uniforme sobre compactos, es un (F)-espacio que tampoco es quasi-normado. Este último ejemplo está enmarcado dentro de la clase más importante de e.v.t: *la clase de los espacios localmente convexos*. $\square$

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Cho69b], [Jar81], [Köt69], [Rud79].

Capítulo 2

# Espacios localmente convexos

TEMARIO



De los tres principios fundamentales que se han estudiado en la asignatura *Análisis Funcional* para espacios de Banach, la validez del primero de ellos, es decir, la validez del teorema de Hahn-Banach, es lo que hace a los espacios localmente convexos superiores a los espacios vectoriales topológicos generales. En espacios localmente convexos, el teorema de Hahn-Banach asegura la existencia de suficientes formas lineales continuas como para poder desarrollar una potente teoría de dualidad, que estudiaremos en el capítulo siguiente. En este capítulo presentamos la teoría básica de espacios localmente convexos, la relación entre entornos convexos y seminormas, propiedades de extensión de formas lineales continuas, propiedades de complementación, operaciones con subconjuntos notables, nociones de completitud, generación de nuevos espacios a través de operaciones proyectivas e inductivas, etc. Así mismo, dedicamos buena parte del capítulo al estudio de estas cuestiones en espacios concretos, como los espacios de funciones continuas, espacios base para la teoría de distribuciones, etc., mostrando, de un lado, la riqueza de esta teoría, y de otro, sentando las bases para posteriores estudios más específicos en los que intervienen estos espacios.

**Lección 2.1 Espacios localmente convexos.**

- Conjuntos convexos y absolutamente convexos en espacios vectoriales. Operaciones: envoltura convexa y absolutamente convexa.

- Conjuntos convexos y absolutamente convexos en e.v.t. Continuidad del funcional de Minkowski asociado a un cuerpo convexo. Seminormas y conjuntos absolutamente convexos.
- Otra aplicación del teorema de Hahn-Banach: condición necesaria y suficiente para la existencia de formas lineales continuas no triviales sobre un e.v.t.
- Un e.v.t. con dual nulo: $(L^p)' = 0$, para $0 < p < 1$. Subespacios finito-dimensionales sin complemento en e.v.t.
- Definición de espacio localmente convexo (e.l.c.). Bases de filtro describiendo topologías localmente convexas. Descripción de una topología localmente convexa por seminormas.
- Caracterización de la convergencia de redes y de la continuidad de aplicaciones lineales en e.l.c.
- Más aplicaciones del teorema de Hahn-Banach: el dual de un e.l.c. separa puntos. Extensión de formas lineales continuas definidas en un subespacio de un e.l.c. Complementación de subespacios finito-dimensionales. Caracterización del cierre de un subespacio de un e.l.c.

*Descripción.* [Köt69, p. 156-159 y p. 202-215], [Sch71, p. 47-51]. Comenzamos este capítulo con un breve estudio de las propiedades elementales de los conjuntos convexos y seminormas en espacios vectoriales y en espacios vectoriales topológicos. A partir de ahora, convexos y seminormas desempeñarán un papel central en las cuestiones que vamos a estudiar. Entre otras propiedades, tiene una relevancia especial la relación existente entre funcionales subaditivos continuos (seminormas continuas) y entornos convexos (absolutamente convexos) del origen en un e.v.t.

Una aplicación del teorema de Hahn-Banach en su versión analítica, lección 4.5 de la asignatura *Análisis Funcional*, nos dice que la condición necesaria y suficiente para que exista una forma lineal no nula sobre un e.v.t. $E[\mathfrak{T}]$ es que $E[\mathfrak{T}]$ posea un entorno convexo del origen no trivial; o lo que es los mismo, que sobre $E[\mathfrak{T}]$ haya una seminorma continua no nula. Esta equivalencia obliga a que, si queremos trabajar dentro de la categoría de los e.v.t. con una subclase cuyos elementos tengan dual no trivial, hemos de imponer condiciones de convexidad local. Surge así, de un modo natural, la clase de los espacios localmente convexos. En un espacio localmente convexo su topología viene dada por una familia de seminormas que separan los puntos.

Como nuevas consecuencias del teorema de Hahn-Banach se tienen las siguientes: el dual de un e.l.c. separa los puntos del espacio; toda forma lineal continua en un subespacio de un e.l.c. tiene extensiones lineales continuas a todo el espacio; todo subespacio finito-dimensional de un e.l.c. tiene complemento topológico; el cierre de un subespacio de un e.l.c. queda determinado por las formas lineales continuas que se anulan sobre él. En resumen, todas las consecuencias que obtuvimos en la lección 4.5 de la asignatura *Análisis Funcional* para espacios normados son válidas en el marco de los e.l.c. $\square$

**Lección 2.2 Algunos espacios localmente convexos.**

- Caracterización de los e.l.c. metrizables. $F$-norma asociada a una familia numerable de seminormas. Espacios de Fréchet.
- Espacios de sucesiones de Köthe. Representación de espacios de funciones holomorfas como espacios de sucesiones de Köthe.
- Topologías sobre espacios de funciones:
  - Los espacios $C_p(X)$ y $C_c(X)$. Propiedades topológicas de $X$ en relación con propiedades vectoriales topológicas de $C_p(X)$ y $C_c(X)$.
  - Topología de convergencia uniforme, compacta-abierta y estricta en $C_b(X)$. Relación entre estas topologías.
- Espacios de funciones diferenciables: $\mathscr{E}^m(\Omega)$, $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{D}_k^m(\Omega)$, $\mathscr{D}_k(\Omega)$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

*Descripción.* [Jar81, p. 25-30, 43-54 y 66-73]. La obtención de los resultados de metrizabilidad para e.v.t. estudiados en el capítulo anterior resulta especialmente sencilla en e.l.c.: por supuesto, un e.l.c. es metrizable si, y sólo si, tiene una base numerable de entornos absolutamente convexos del origen; en este caso, la $F$-norma que describe la topología se expresa en función de las seminormas asociadas a la base de entornos, de forma análoga a como se construye una métrica para el producto numerable de espacios metrizables. Además de este estudio general de e.l.c. metrizables, en esta lección nos ocupamos de tres bloques importantes de ejemplos:

a) Espacios de sucesiones de Köthe: indicamos un método general para construir espacios de sucesiones. Se comenta cómo esta técnica proporciona una potente herramienta para la construcción de ejemplos y contraejemplos en la teoría general de e.l.c., así como un método para estudiar isomorfismos entre éstos. A modo de ilustración, representamos los espacios de funciones enteras y funciones holomorfas en el disco unidad como espacios de sucesiones.

b) Espacios de funciones continuas: introducimos diversas topologías en espacios de funciones continuas y en espacios de funciones continuas acotadas. En estos últimos, construimos una topología mixta a través de una norma y una topología localmente convexa. Se resalta, mediante resultados concretos de metrizabilidad y separabilidad, la dualidad existente entre espacios topológicos $X$ y sus espacios de funciones continuas $C(X)$, insistiendo en la posibilidad de estudiar propiedades topológicas de $X$ vía propiedades vectoriales topológicas de $C(X)$ y al revés.

c) Espacios de funciones diferenciables: se presentan algunos de los espacios de funciones diferenciables que tienen un lugar sobresaliente en la teoría de las distribuciones y en el estudio de la transformada de Fourier. □

**Lección 2.3 Subconjuntos notables de un e.l.c..**

- Acotados y precompactos: envolturas convexas y absolutamente convexas. Caracterización de los precompactos de e.l.c. metrizables.
- Envoltura convexa y absolutamente convexa de un compacto finito-dimensional. Envolturas convexas y absolutamente convexas de compactos en e.l.c.
- Discos y discos de Banach. Caracterización de los discos de Banach. Condición suficiente para que un conjunto sea un disco de Banach. Coincidencia de los discos de Banach para topologías $F$-ligadas.

*Descripción.* [Jar81, p. 113] y [Köt69, p. 240-243]. En e.l.c., las clases de subconjuntos acotados y precompactos se comportan bien respecto a la formación de envolturas convexas y absolutamente convexas. Analizamos aquí estas cuestiones y, en relación con ellas, caracterizamos los precompactos de un e.l.c. metrizable como los conjuntos contenidos en envolturas cerradas convexas de sucesiones nulas. Los subconjuntos compactos tienen un comportamiento diferente al de los acotados y precompactos: si bien la envoltura convexa (absolutamente convexa) de un compacto finito-dimensional es de nuevo un compacto, en general esto no ocurre así, y para garantizar propiedades de compacidad se han de exigir propiedades de completitud en los cierres de estas envolturas (un refinamiento de estas propiedades dará lugar a los teoremas de Krein). La lección se completa con un breve estudio de los discos y discos de Banach. Un disco $A$ en un e.l.c. $E$ es un conjunto acotado y absolutamente convexo. Si $A$ es un disco y $E_A$ es el espacio generado por $A$, el funcional de Minkowski de $A$ en $E_A$ es una norma, $\|\cdot\|_A$. Cuando $(E_A, \|\cdot\|_A)$ es un espacio de Banach, se dice que $A$ es un disco de Banach. La caracterización de los discos de Banach en términos de series convexas, al igual que la condición suficiente que garantiza que un disco cerrado sucesionalmente completo es un disco de Banach, resultarán especialmente útiles para estudiar diversas cuestiones: teorema de Banach-Mackey, teoremas generales de la gráfica cerrada, etc. $\square$

**Lección 2.4 Nociones de completitud.**

- Sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy en el sentido de Mackey. Espacios localmente completos. Caracterización de la completitud local a través de discos de Banach.
- Espacios sucesionalmente completos y casi-completos.
- La propiedad estricta de Mackey para e.l.c. metrizables: un teorema de Grothendieck. Equivalencia de las nociones de completitud en e.l.c. metrizables.
- Completitud y topologías $F$-ligadas.
- Ejemplos: completitud de los espacios de funciones diferenciables. Caracterización de la casi-completitud de los espacios de funciones continuas con la topología compacta abierta y con la topología estricta. Completitud para la topología de convergencia puntual.

*Descripción.* [Gro73, p. 156], [Jar81, p. 70-71] y [Köt69, p. 295]. A pesar de que un e.l.c. no sea completo, puede que éste verifique alguna condición más débil que la completitud que sea suficiente para garantizar que determinadas redes (por ejemplo, acotadas o sucesiones) de Cauchy sean convergentes. En este marco están incluidas las nociones de espacio casi-completo, sucesionalmente completo y localmente completo. Estudiamos estos conceptos, viendo que se tienen las implicaciones estrictas

$$\text{completo} \implies \text{casi-completo} \implies \text{sucesionalmente completo} \implies \text{localmente completo},$$

y establecemos que todos estos conceptos de completitud coinciden en los e.l.c. metrizables. Como una nueva aplicación del teorema de Robertson-Bourbaki, establecemos que las propiedades de completitud de topologías se heredan por refinamiento siempre que la topología más fina que se considera tenga una base de entornos del origen formada por conjuntos cerrados en la topología de partida *i.e.*, topología F-ligadas. Como ejemplos de espacios completos destacamos los espacios de funciones diferenciables.

Ahondando en la dualidad existente ente las propiedades de un espacio topológico $X$ y su espacio de funciones continuas $C(X)$, caracterizamos los espacios topológicos $X$ para los que $C_c(X)$, $C_p(X)$ y $C_b(X)$, con la topología estricta, son completos. □

**Lección 2.5 Topologías proyectivas.**

- Permanencia de la clase de e.l.c. por topologías proyectivas. Subespacios, productos, supremos y topologías débiles.
- Límites proyectivos. Completitud de los límites proyectivos. Aplicación: los espacios de sucesiones de Köthe son completos.
- Representación proyectiva de e.l.c.: los e.l.c. como subespacios de productos de espacios de Banach. Vía alternativa para la complección de un e.l.c.

*Descripción.* [Sch71, p. 54-57] y [Jar81, p. 69]. Las topologías proyectivas en e.v.t. descritas en el capítulo anterior son topologías localmente convexas cuando los espacios considerados en llegada son e.l.c. En consecuencia, mediante subespacios, productos, supremos, etc., se pueden obtener nuevos e.l.c. a partir de otros ya conocidos.

De una forma notablemente más sencilla que el tratamiento general descrito para e.v.t. en la lección 1.4, se prueba que todo e.l.c. se sumerge como un subespacio de un producto de espacios de Banach. Así, podemos completar un e.l.c. de la siguiente forma: mirado el e.l.c. en cuestión como un subespacio de un producto de Banach, su complección se obtiene cerrándolo en dicho producto. □

**Lección 2.6 Topologías inductivas.**

- Sumas directas localmente convexas de e.l.c. Completitud de una suma directa. Acotados de una suma directa. La topología localmente convexa más fina: el espacio $\varphi_d(\mathbb{K})$.
- Cocientes de e.l.c. Envolturas localmente convexas de e.l.c. Continuidad de las aplicaciones lineales definidas sobre estos espacios. Límites inductivos.
- Límites inductivos estrictos numerables. Topología inducida sobre los escalones por la topología de un límite inductivo estricto numerable.
- Límites inductivos hiperestrictos numerables. El teorema de Dieudonné-Schwartz: localización de acotados. Sucesiones convergentes.
- Completitud de los límites inductivos estrictos numerables de espacios completos.

*Descripción.* [Jar81, p. 74-87], [Köt69, p. 215-223]. La descripción explícita de bases de entornos del origen para topologías inductivas en la categoría de e.v.t. resulta a veces una tarea complicada y tediosa. Sin embargo, cuando restringimos nuestra atención a topologías inductivas en la categoría de e.l.c., las descripciones de bases de entornos del origen resultan mucho más sencillas. En esta lección prestamos una especial atención a estas cuestiones, analizando con detalle las propiedades de las sumas directas localmente convexas e introduciendo las envolturas localmente convexas y límites inductivos de e.l.c. que son particularmente importantes por sus aplicaciones.

Los límites inductivos de espacios localmente convexos aparecen con gran profusión en muchos campos del Análisis Funcional, por ejemplo, en la teoría de las distribuciones. La estructura localmente convexa de los límites inductivos generales puede llegar a ser bastante complicada. Sin embargo, la mayoría de los límites inductivos que aparecen en las aplicaciones son numerables y, como veremos, muchos de ellos involucran a espacios de funciones. De especial sencillez son los límites inductivos numerables estrictos e hiperestrictos, cuyas propiedades analizamos en esta lección. Los límites inductivos estrictos inducen sobre cada escalón la topología de éste. Si además cada escalón es cerrado en el siguiente, *i.e.*, si el límite inductivo es hiperestricto, los acotados del límite inductivo son los conjuntos contenidos y acotados en algún escalón y, en particular, las sucesiones convergentes son las contenidas y convergentes en algún escalón. En cuanto a la completitud, todo límite inductivo estricto de espacios completos es un espacio completo, resultado que puede ser obtenido, o bien utilizando el teorema de los filtros de Köthe, o bien como una aplicación del teorema de Hahn-Banach. $\square$

**Lección 2.7 Espacios (LF) y espacios (LB).**

- Definiciones de espacios (LF) y espacios (LB).
- Ejemplos distinguidos: el espacio (LB) $\mathscr{K}(\Omega)$, el espacio (LB) $\mathscr{D}^m(\Omega)$ y el espacio (LF) $\mathscr{D}(\Omega)$.

- El espacio (LB)-no completo de Köthe.
- Un teorema de gráfica cerrada y localización para espacios de Banach y espacios (LB).
- Caracterización de los espacios (LB) que localizan los acotados.

*Descripción.* [Köt69, p. 223-225 y 434-435], [Val82, Capítulo 3] y [Kho72, p. 134-138]. Los límites inductivos de espacios de Fréchet, espacios (LF), y los límites inductivos de espacios de Banach, espacios (LB), proporcionan los ejemplos más importantes de límites inductivos del Análisis Funcional: los espacios base para la teoría de las distribuciones. Cuando se trata con espacios (LF) o (LB) estrictos, todos los resultados de localización y completitud estudiados en la lección anterior se aplican a estos espacios; así por ejemplo, el espacio $\mathscr{K}(\Omega)$ (también $\mathscr{D}^m(\Omega)$, $\mathscr{D}(\Omega)$) es completo, y las sucesiones de funciones convergentes en $\mathscr{K}(\Omega)$ son aquéllas para las que existe un compacto fijo que controla los soportes de todas las funciones y sobre el cual la sucesión converge uniformemente. Este comportamiento no se extiende a (LF) y (LB) no estrictos, como pone de manifiesto el celebrado ejemplo de Köthe, el cual suministra un espacio (LB) que ni tan siquiera localiza los compactos en sus escalones. Usando las ideas del teorema de la gráfica cerrada establecido en la lección 5.3 de la asignatura *Análisis Funcional*, damos aquí una sencilla prueba para un teorema de gráfica cerrada y localización entre espacios de Banach y espacios (LB) que nos permite caracterizar los espacios (LB) que localizan sus acotados como aquéllos que son localmente completos. $\square$

**Lección 2.8 Duales de algunos espacios de funciones continuas.**

- Dual de $C_b(X)$ para la topología estricta.
- Dual de $C(X)$ para la topología compacta abierta y la topología de convergencia puntual.
- Dual de $\mathscr{K}(\Omega)$: medidas de Radon positivas. Descomposición de una medida de Radon como diferencia de medidas de Radon positivas. Funciones localmente integrables como medidas de Radon.

*Descripción.* [Jar81, p. 137-144] y [Kho72, p. 81-88]. Algunas propiedades de los espacios localmente convexos se pueden estudiar fácilmente a través de propiedades de sus duales, razón por la que resulta interesante conocer los duales de ciertos espacios concretos. En esta lección calculamos los duales de algunos de los espacios de funciones continuas que utilizaremos con asiduidad. El primer cálculo que hacemos corresponde al dual del espacio de funciones continuas acotadas sobre un espacio topológico dotado de la topología estricta; en este caso, el dual se identifica con el espacio de medidas de Borel regulares respecto a compactos. A continuación, calculamos el dual del espacio de funciones continuas sobre un espacio topológico dotado de la topología compacta-abierta y de la topología de convergencia puntual, cuyo conocimiento nos será esencial para el estudio que realizaremos en las lecciones 4.6 y 4.11. Por último, para el espacio de las funciones continuas en un abierto de $\mathbb{R}^n$ y con soporte compacto, $\mathscr{K}(\Omega)$, con su topología límite inductivo, estudiamos su dual, espacio de medidas de Radon sobre $\Omega$, viendo que toda forma lineal positiva sobre $\mathscr{K}(\Omega)$ es una medida de Radon y estableciendo que toda medida de Radon se puede expresar como diferencia de dos medidas de Radon positivas. Como veremos en el capítulo 7, las medidas de Radon son un tipo particular de distribuciones, y el poder mirar las funciones localmente integrables como medidas de Radon ofrece un punto de vista general para ver las funciones que nos permitirá, en el contexto de las distribuciones, realizar operaciones con ellas que no tienen sentido si las miramos como funciones de punto a punto. $\square$

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[CM02], [Gro73], [Jar81], [Köt69] [Sch71], [Val82], [Kho72].

Capítulo 3

# Teoría de dualidad para espacios localmente convexos

TEMARIO



En un cierto sentido, el presente capítulo es el más importante de toda la teoría de espacios localmente convexos. La dualidad es lo que hace esta teoría poderosa, porque proporciona una herramienta para trasladar un problema sobre un espacio (donde puede ser difícil) a un problema concerniente a formas lineales (que puede ser mucho más fácil de tratar). Las técnicas de dualidad también permiten reemplazar la topología original de un e.l.c. por otras topologías más simples cuando se tratan problemas que involucran acotación, convexidad, continuidad, etc. Una de las más importantes de estas topologías es la topología débil. Nosotros introducimos las topologías débiles relativas a un par dual general, estudiando las construcciones básicas de la formación de polares y bipolares. Nos ocupamos igualmente del estudio de los acotados en un par dual, estableciendo el teorema de Banach-Mackey y, como consecuencia suya, el teorema de Mackey, que garantiza la coincidencia de las familias de acotados en todas las topologías compatibles con un par dual. Introducimos las $\mathfrak{G}$-topologías en espacios de aplicaciones lineales, y discutimos los principales ejemplos, en particular, para pares de espacios en dualidad, determinando, a través del teorema de Mackey-Arens, cómo han de ser las topologías localmente convexas compatibles con una dualidad. Posteriormente, analizamos la dualidad de aplicaciones lineales y la dualidad entre topologías proyectivas y topologías inductivas, terminando el capítulo con un estudio pormenorizado del modelo de Grothendieck para la complección de un e.l.c. y del teorema de Banach-Dieudonné, en el que analizamos finamente las topologías que intervienen en el teorema de completitud de Grothendieck en el caso de un espacio metrizable.

**Lección 3.1 Teoremas de separación en espacios localmente convexos.**

- Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach: teorema de Mazur.
- Primer teorema de separación de conjuntos convexos (en e.v.t.).
- Segundo teorema de separación para conjuntos convexos (en e.l.c.).
- Cierre de un convexo en un e.l.c. Hiperplanos soporte. Convexos compactos en e.l.c.

*Descripción.* [Köt69, p. 191, 243-245], [Jar81, p. 130-131]. Si se analiza el trabajo que se ha de realizar en espacios normados para deducir la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach a partir de la versión analítica, uno se convence de que las ideas que subyacen en esta deducción no son exclusivas de los espacios normados. La razón por la que es posible obtener consecuencias de tipo geométrico para conjuntos convexos a partir del teorema de extensión de Hahn-Banach, es que los conjuntos convexos se *describen* mediante funcionales sublineales positivamente homogéneos, y los convexos con propiedades topológicas adicionales se describen mediante funcionales sublineales con propiedades adicionales: tanto en espacios normados como en e.v.t., todo conjunto convexo y abierto con 0 como punto interior es la bola unidad abierta de un funcional subaditivo, positivamente homogéneo y continuo, para la topología del espacio en cuestión. Estas consideraciones (véase la lección 2.1) permiten mirar esta lección como un refinamiento de los resultados obtenidos en la lección 4.6 de la asignatura *Análisis Funcional*. Podemos ahora probar que, en un e.v.t., si un conjunto convexo abierto no corta a una variedad lineal, entonces tampoco corta a un hiperplano cerrado que contiene a la variedad (teorema de Mazur). De aquí se sigue que en e.v.t. se pueden separar, mediante un hiperplano real cerrado, un convexo abierto de un convexo que no lo corta (primer teorema de separación), y que en e.l.c. se pueden separar estrictamente, por un hiperplano real cerrado, un convexo compacto de un convexo cerrado que no lo corta (segundo teorema de separación). Las consecuencias que se derivaron en la lección 4.6, de la asignatura *Análisis Funcional*, de los teoremas de separación para espacios normados, son ahora válidas en la clase de los e.l.c. □

**Lección 3.2 Pares duales y topologías débiles.**

- Par dual asociado a un e.l.c. Pares de espacios en dualidad. Topologías débiles y sus duales. Relación entre la topología de un e.l.c. y su topología débil.
- Topologías compatibles con un par dual. Cierre de convexos en topologías compatibles.
- Dualidades inducidas: caracterización de subespacios débilmente densos.

- Complección de un espacio con su topología débil. Aplicación: los normados de dimensión infinita no son nunca débilmente completos.
- Conjuntos acotados y precompactos para la topología débil.

*Descripción.* [Köt69, p. 234-236]. Si $E[\mathfrak{T}]$ es un e.l.c., el teorema de Hahn-Banach garantiza que la aplicación de $E \times E' \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por $\langle x, x' \rangle := x'(x)$ es una forma bilineal no degenerada. Una abstracción de esta situación lleva a definir lo que se entiende por par dual $\langle E, F \rangle$ de espacios vectoriales. Mediante las identificaciones pertinentes y la consideración de topologías débiles, se establece que todo par dual siempre se obtiene de la forma indicada al principio, *i.e.*, poniendo en dualidad un e.l.c. y su dual topológico. Se puede hablar ahora de topologías compatibles con un par dual prefijado de antemano. Muchas cuestiones relativas a e.l.c. no dependen de la topología originalmente considerada, sino de los pares duales a los que éstos dan lugar; por ejemplo, una aplicación de los resultados establecidos en la lección anterior nos proporciona que el cierre de un convexo en un e.l.c. $E[\mathfrak{T}]$ es el mismo en todas las topologías compatibles, y en particular, en $\mathfrak{T}$ y en $\sigma(E, E')$. Así, la topología débil puede ser utilizada como una herramienta para estudiar ciertas cuestiones concernientes a cualquier topología compatible con el par $\langle E, E' \rangle$. El hecho de que las topologías débiles sean topologías inducidas por las de un producto adecuado de copias del cuerpo, posibilita un fácil estudio de sus complecciones y la caracterización de los conjuntos débil acotados como los débil precompactos. $\square$

**Lección 3.3 Polarización.**

- Polares. Primeras propiedades. La polar de un subespacio.
- Teorema del bipolar. Polares de intersecciones.
- Familias de conjuntos en correspondencia por polaridad:
  toneles $\longleftrightarrow$ conjuntos débilmente acotados; entornos del origen $\longleftrightarrow$ equicontinuos.
- Criterio de Šmulian para compacidad débil. El teorema de Alaoglu-Bourbaki.

*Descripción.* [Jar81, p. 148-149], [KN76, p. 142], [Köt69, p. 245-247] y [FHH$^+$01, p. 119-121]. La geometría de un par dual $\langle E, F \rangle$ es investigada por medio de polares, donde la polar de un subconjunto $A$ de $E$ es el conjunto de todos los $y \in F$ tales que $|\langle x, y \rangle| \leq 1$ para todo $x \in A$. Entre otros resultados que estudiamos en esta lección, destacamos:

(a) El teorema del bipolar, consecuencia del teorema de Hahn-Banach, que establece que la bipolar de un conjunto $A \subset E$ coincide con la envoltura absolutamente convexa y débil cerrada de $A$ en $E$.

(b) El criterio de Šmulian, consecuencia del teorema de Tychonoff, que caracteriza los conjuntos absolutamente convexos débil cerrados $A$ de $E$ que son débilmente compactos, como los conjuntos cuya polar $A^\circ$ es un tonel de $F\left[\sigma(F,E)\right]$ con la propiedad de que los funcionales lineales definidos en $F$ que son acotados sobre $A^\circ$ son representables por un elemento de $E$.

Por sus importantes consecuencias (problemas de aproximación de formas lineales, estudio de compacidad débil, etc.), el teorema del bipolar y el criterio de Šmulian pueden ser considerados como dos resultados centrales de la teoría de dualidad de e.l.c. □

**Lección 3.4 Conjuntos acotados y fuertemente acotados en pares duales.**

- Conjuntos acotados y fuertemente acotados. Ejemplos en la dualidad $\langle\varphi,\varphi\rangle$.
- Los discos de Banach como conjuntos fuertemente acotados: el teorema de Banach-Mackey. Conjuntos acotados en e.l.c. localmente completos y sus duales.
- Acotados en topologías compatibles: el teorema de Mackey.

*Descripción.* [Köt69, p. 251-254]. En la lección 2.1 vimos que la formación de envolturas cerradas convexas de un subconjunto $M$ de un e.l.c. $E[\mathfrak{T}]$ depende sólo del par dual $\langle E,E'\rangle$. Estableceremos en esta lección que los conjuntos acotados de un e.l.c. $E[\mathfrak{T}]$ son también los mismos en todas las topologías compatibles con el par dual $\langle E,E'\rangle$. Este resultado lo obtenemos como un caso especial de un resultado más general enunciado en términos de pares duales. Para ello, introducimos el concepto de conjunto acotado en un par dual, y apoyándonos en éste, presentamos la noción de conjunto fuertemente acotado. El teorema de Banach-Steinhaus para espacios de Banach, lección 5.1 de la asignatura *Análisis Funcional*, nos permite obtener que si $\langle E,F\rangle$ es un par dual y $A\subset E$ es un $\sigma(E,F)$-disco de Banach, entonces $A$ es un conjunto fuertemente $F$-acotado de $E$, resultado conocido como teorema de Banach-Mackey. En particular, si $E\left[\sigma(E,F)\right]$ es localmente completo, entonces todo conjunto acotado de $E\left[\sigma(E,F)\right]$ es fuertemente $F$-acotado, y pasando al dual, todo conjunto acotado de $F\left[\sigma(F,E)\right]$ es fuertemente $E$-acotado. El teorema de Banach-Mackey y el teorema del bipolar nos llevan ahora a la obtención del teorema de Mackey, el cual garantiza que los conjuntos acotados de un e.l.c. son los mismos para todas las topologías compatibles. □

**Lección 3.5 $\mathfrak{G}$-topologías.**

- $\mathfrak{G}$-topologías en subespacios de un espacio $F[v]^T$.
- Espacios de aplicaciones lineales dotados de $\mathfrak{G}$-topologías. Familias saturadas de conjuntos acotados de un e.l.c. $E[\mathfrak{T}]$. Bases de entornos del origen y familias fundamentales de seminormas para $\mathfrak{G}$-topologías. Caso particular: $\mathfrak{G}$-topologías en un par dual $\langle E,F\rangle$.
- Ejemplos importantes: $E[\mathfrak{T}]$ y $F[v]$ e.l.c. (véase la tabla 3.1).
- Comparación de las topologías introducidas.

*Descripción.* [Köt69, p. 254-256] y [Sch71, p. 79-82]. La construcción de topologías de convergencia uniforme sobre una familia de conjuntos en un espacio de funciones con valores en e.l.c. es

| Familia $\mathfrak{G}$ de conjuntos | Topología en $\mathscr{L}(E,F)$ | Topología en $E'$ |
|---|---|---|
| Finitos de $E$ | $\mathscr{L}_s(E,F)$ | $E'\left[\sigma(E',E)\right]$ |
| Acotados de $E\left[\sigma(E,E')\right]$ | $\mathscr{L}_\beta(E,F)$ | $E'\left[\beta(E',E)\right]$ |
| Fuertemente acotados de $E$ | $\mathscr{L}_{\beta^*}(E,F)$ | $E'\left[\beta^*(E',E)\right]$ |
| Discos de Banach de $E\left[\sigma(E,E')\right]$ | $\mathscr{L}_b(E,F)$ | $E'\left[b(E',E)\right]$ |
| Absolutamente convexos y compactos de $E\left[\sigma(E,E')\right]$ | $\mathscr{L}_\mu(E,F)$ | $E'\left[\mu(E',E)\right]$ |
| Precompactos de $E[\mathfrak{T}]$ | $\mathscr{L}_{pc}(E,F)$ | $E'\left[\mathfrak{T}_{pc}(E',E)\right]$ |

Cuadro 3.1: Ejemplos importantes de topologías.

de importancia fundamental y, como veremos, todas las topologías localmente convexas pueden obtenerse de este modo. Sean $E[\mathfrak{T}]$ y $F[\nu]$ dos e.l.c. y $\mathfrak{G}$ una familia de acotados de $E[\mathfrak{T}]$ dirigida por inclusión; la $\mathfrak{G}$-topología, $\mathfrak{T}_\mathfrak{G}$, del espacio de aplicaciones lineales continuas $\mathscr{L}(E,F)$, es la topología de convergencia uniforme sobre los elementos de $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{T}_\mathfrak{G}$ es una topología localmente convexa que es separada si, y sólo si, $\mathfrak{G}$ es total en $E[\mathfrak{T}]$. Esta construcción puede ser aplicada al caso de pares duales $\langle E,F\rangle$ y utilizar familias $\mathfrak{G}$ de conjuntos $\sigma(F,E)$-acotados de $F$ (respectivamente, familias $\mathfrak{G}$ de conjuntos $\sigma(E,F)$-acotados de $E$) para definir topologías localmente convexas en $E$ (respectivamente, en $F$). En este caso, las polares $\{B^\circ : B\in\mathfrak{G}\}$ forman una subbase de entornos del origen en $E$ para la $\mathfrak{G}$-topología; además, si $\mathfrak{G}$ es saturada, estas polares forman una base. En la presente lección analizamos estas cuestiones e introducimos $\mathfrak{G}$-topologías concretas que proporcionan topologías localmente convexas significativas: topologías fuertes, topologías de Mackey, etc. □

**Lección 3.6 Topologías compatibles con un par dual.**

- La topología original de un e.l.c. como la topología de convergencia uniforme sobre la familia de equicontinuos del dual.
- Topologías compatibles con una dualidad: el teorema de Mackey-Arens. La topología de Mackey del par dual.
- Espacios de Mackey. Ejemplos: la topología de un e.l.c. metrizable es de Mackey.
- Aplicaciones: los e.l.c. como subespacios de espacios de funciones continuas. Representación de e.l.c. metrizables. Caracterización de los e.l.c. metrizables separables.

*Descripción.* [Köt69, p. 258-263]. Como hemos visto en la lección anterior, al partir de un e.l.c. $E[\mathfrak{T}]$ se pueden considerar en $E$ distintas $\mathfrak{G}$-topologías para distintas familias saturadas de conjuntos acotados de $E'\left[\sigma(E',E)\right]$. De especial notoriedad son las topologías definidas por

- $\mathscr{F}$ := envoltura saturada de la familia de subconjuntos finitos de $E'$,
- $\mathscr{E}$ := familia de $\mathfrak{T}$-equicontinuos de $E'$, y
- $\mathscr{C}$ := envoltura saturada de la familia de conjuntos absolutamente convexos y compactos de $E'[\sigma(E',E)]$,

para las que se tienen las inclusiones $\mathscr{F} \subset \mathscr{E} \subset \mathscr{C}$. El primer resultado establecido en esta lección asegura que la topología original de un e.l.c. $E[\mathfrak{T}]$ es la topología de convergencia uniforme sobre los equicontinuos del dual, *i.e.*, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\mathscr{E}}$. Por otra parte, el criterio de compacidad de Šmulian, lección 3.3, implica directamente el teorema de Mackey-Arens, el cual nos dice que una topología en $E$ es compatible con la dualidad $\langle E,E'\rangle$ si, y sólo si, es una topología de convergencia uniforme sobre una familia $\mathfrak{G}$ saturada de conjuntos de $E'$ tal que $\mathscr{F} \subset \mathfrak{G} \subset \mathscr{C}$. Llegamos así, de forma natural, a la consideración de la topología más fina compatible con una dualidad, topología de Mackey, que es la topología de convergencia uniforme sobre todos los subconjuntos de $\mathscr{C}$. Un e.l.c. cuya topología es la topología de Mackey del par dual se dice que es un espacio de Mackey; como primeros ejemplos de estos espacios mostramos que los e.l.c. metrizables son espacios de Mackey. La posibilidad de obtener la topología de un e.l.c. $E[\mathfrak{T}]$ como la $\mathscr{E}$-topología, permite mirar cualquier e.l.c. como un subespacio de un espacio de funciones continuas sobre un espacio localmente compacto con la topología compacta abierta. Este punto de vista resulta a menudo bastante útil: por ejemplo, para caracterizar los e.l.c. metrizables separables como aquéllos en los que los equicontinuos del dual son débil$^*$-metrizables. □

**Lección 3.7 Dualidad de aplicaciones lineales.**

- Definición de aplicación adjunta. Continuidad débil y existencia de aplicaciones adjuntas.
- Relación, mediante polaridad, entre aplicaciones lineales y sus adjuntas.
- Continuidad de una aplicación lineal vía propiedades de su adjunta.
- Aplicación: bipolar de una sucesión débilmente nula en un e.l.c. localmente completo.

*Descripción.* [Jar81, p. 160-162]. Cualquier aplicación lineal $T : E \longrightarrow F$ entre espacios vectoriales tiene asociada, de forma natural, su adjunta algebraica $T^* : F^* \longrightarrow E^*$. Ya hemos visto en la asignatura *Análisis Funcional* que si $E$ y $F$ son espacios normados y $T$ es un operador acotado entre ellos, entonces $T^*(F') \subset E'$ y $T' = T^*\big|_{F'}: F' \longrightarrow E'$ es un operador lineal acotado entre los espacios de Banach duales. En esta lección estudiamos la existencia y propiedades de aplicaciones adjuntas en el marco general de los e.l.c. Como un primer resultado establecemos que si $E[\mathfrak{T}]$ y $F[\nu]$ son dos e.l.c. y $T : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal, entonces la condición necesaria y suficiente para que $T^*(F') \subset E'$ es que $T$ sea $(\sigma(E,E') - \sigma(F,F'))$-continua, y en este caso, la adjunta topológica $T' := T^*\big|_{F'}$ es $(\sigma(F',F) - \sigma(E',E))$-continua. Las relaciones entre $T$ y $T'$, vía polaridad, reducen ahora propiedades de continuidad de $T$ a propiedades de que $T'$ lleve ciertas familias de conjuntos de $F'$ a ciertas familias de conjuntos de $E'$, criterio que resulta muy útil en determinados casos particulares. Como ilustración de estas técnicas, vemos de qué forma un sencillo argumento de transposición es suficiente para obtener que la envoltura absolutamente convexa y cerrada de una sucesión débilmente nula $(x_n)$ en un e.l.c. localmente completo $E[\mathfrak{T}]$, es un conjunto débilmente compacto que se obtiene como

$$\overline{\Gamma\{x_n : n = 1,2,\ldots\}} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1\right\}. \qquad \square$$

**Lección 3.8 Dualidad entre las topologías proyectivas e inductivas.**

- Duales de subespacios y espacios cociente.
- Las topologías de subespacios, cocientes y sus duales.
- Duales de subespacios y de cocientes de espacios normados.
- La dualidad de productos topológicos y sumas directas localmente convexas.

*Descripción.* [Köt69, p. 275-288]. Al transponer una aplicación lineal débilmente continua entre dos e.l.c. $T : E \longrightarrow F$, se obtiene una aplicación débilmente continua $T' : F' \longrightarrow E'$. Este intercambio de los espacios dominio y rango sugiere que, mediante el cálculo de duales, las topologías proyectivas van a dar lugar a topologías inductivas y viceversa; en la presente lección nos ocupamos de este tipo de dualidad. No enfocaremos el tema con toda la generalidad posible; nos limitaremos únicamente a la dualidad entre las topologías inducida y cociente, y entre las topologías producto y suma directa localmente convexa, centrándonos en las diversas topologías introducidas en las lecciones 2.5 y 2.6. Los resultados establecidos en esta lección son la clave para el estudio de las propiedades de estabilidad de clases distinguidas de e.l.c.: espacios de Mackey, tonelados, casi tonelados, semirreflexivos, etc. □

**Lección 3.9 El teorema de completitud de Grothendieck.**

- Caracterización de la continuidad de aplicaciones lineales restringidas a conjuntos absolutamente convexos.
- Lema de aproximación para formas lineales.
- El teorema de completitud de Grothendieck.
- Consecuencias: caracterización de las formas débil$^*$-continuas en el dual de e.l.c. completos y separables. El teorema de Pták-Collins.

*Descripción.* Para obtener el teorema de completitud de Grothendieck hemos elegido el método que, a nuestro juicio, es el más rápido y claro. Este método es el expuesto en los libros de Horvath [Hor66], Kelley-Namioka [KN76] y Jarchow [Jar81, p. 176-178], entre otros. La clave para la demostración del teorema de completitud reside en el siguiente lema de aproximación de formas lineales: sean $E[\mathfrak{T}]$ un e.l.c., $x^*$ una forma lineal sobre $E$ y $A \subset E$ un conjunto absolutamente convexo. Entonces, $x^*$ es continua sobre $A$ si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $x' \in E'$ tal que $|x^*(x) - x'(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$. Este lema de aproximación hace que, ahora, la prueba del teorema de Grothendieck sea poco más que un ejercicio. La gran ventaja del punto de vista de Grothendieck para construir la complección de un e.l.c. es que su modelo está construido en términos dualidad, lo que para ciertas cuestiones resulta de gran utilidad; por ejemplo, si $E[\mathfrak{T}]$ es un e.l.c. completo, entonces los hiperplanos $\sigma(E',E)$-cerrados de $E'$ son, exactamente, aquéllos que tienen cortes cerrados con los equicontinuos de $E'$, teorema de Pták-Collins. □

**Lección 3.10 El teorema de Banach-Dieudonné.**

- Las topologías $\mathfrak{T}^f$ y $\mathfrak{T}^{lf}$ y el teorema de completitud de Grothendieck.
- El teorema de Ascoli en espacios de aplicaciones lineales continuas.
- La topología de convergencia precompacta en el dual de un e.l.c. metrizable: teorema de Banach-Dieudonné.
- El teorema de Krein-Šmulian. Aplicación a espacios de Fréchet separables.

*Descripción.* [Köt69, p. 263-269]. Si $E[\mathfrak{T}]$ es un e.l.c. y $\mathfrak{T}^f$ (respectivamente, $\mathfrak{T}^{lf}$) es la topología (respectivamente, la topología localmente convexa) más fina sobre $E'$ que coincide con $\sigma(E',E)$ en los conjuntos equicontinuos, entonces el modelo de Grothendieck para la complección de $E[\mathfrak{T}]$ es el conjunto de la formas lineales sobre $E'$ que son $\mathfrak{T}^{lf}$-continuas, o lo que es lo mismo, $\mathfrak{T}^f$-continuas. $\mathfrak{T}^f$ y $\mathfrak{T}^{lf}$ son, en general, topologías difíciles de determinar, y en principio, la única información que se tiene sobre ellas es que $\mathfrak{T}^{lf} \leq \mathfrak{T}^f$, siendo a su vez $\mathfrak{T}^{lf}$ más fina que la topología $\mathfrak{T}_{pc}(E',E)$ de convergencia uniforme sobre los precompactos de $E[\mathfrak{T}]$, teorema de Ascoli. Sin embargo, en el caso de que $E[\mathfrak{T}]$ sea un e.l.c. metrizable, el teorema de Banach-Dieudonné nos asegura que $\mathfrak{T}^f = \mathfrak{T}^{lf} = \mathfrak{T}_{pc}(E',E)$. Como una consecuencia del teorema de Banach-Dieudonné, se mejora notablemente el teorema de Pták-Collins para espacios de Fréchet, obteniéndose que en el dual de estos espacios un subconjunto convexo es débil$^*$-cerrado si, y sólo si, sus trazas con los equicontinuos son débil$^*$-cerradas, resultado conocido como teorema de Krein-Šmulian. □

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Jar81], [KN76], [Köt69], [Sch71].

Capítulo 4

# Clases importantes de espacios localmente convexos

**TEMARIO**



La intención de hacer válido el teorema de Hahn-Banach en la clase más amplia posible de espacios vectoriales topológicos es lo que nos ha hecho considerar, en los capítulos 2 y 3, la clase de los espacios localmente convexos. Ahora, la idea de clasificar los espacios localmente convexos según su comportamiento respecto a los otros principios fundamentales del Análisis Funcional, nos lleva a introducir la clase de los espacios tonelados: los espacios tonelados están caracterizados como aquéllos en los que se verifica el principio de la acotación uniforme, y constituyen la clase maximal de espacios de partida para teoremas de gráfica cerrada con espacios de Banach en llegada.

Junto a los espacios tonelados estudiamos, en este capítulo, otras clases importantes de espacios localmente convexos: espacios semirreflexivos y reflexivos, espacios semi-Montel y de Montel, espacios de Schwartz, espacios bornológicos y ultrabornológicos, y los espacios (DF) de Grothendieck. En todos los casos, la introducción y el estudio de estas clases de espacios vienen sugeridos por el deseo de subsanar ciertas carencias de la clase de los espacios localmente convexos generales: en los espacios semirreflexivos se satisface la propiedad de Heine-Borel para la topología débil del espacio; en los espacios semi-Montel se satisface la propiedad de Heine-Borel para la propia topología del espacio; en los espacios de Schwartz se tiene una propiedad similar en sus duales, siendo en éstos los equicontinuos conjuntos rápidamente compactos; los espacios bornológicos comparten con los espacios normados la propiedad de que las aplicaciones lineales acotadas son continuas; los espacios ultrabornológicos servirán para extender notablemente los teoremas de gráfica cerrada entre espacios de Banach; los espacios (DF) son, en cierto modo, una generalización de los espacios normados, y proporcionan el marco adecuado para el estudio de los duales de espacios metrizables. Como en capítulos anteriores, dedicamos una parte importante de éste a clasificar, dentro de las clases introducidas, los espacios habituales de funciones continuas y funciones diferenciables que venimos estudiando.

**Lección 4.1 Espacios tonelados.**

- Recordatorio: toneles (toneles bornívoros) y sus polares. Espacios (casi) tonelados.
- Caracterizaciones duales de los espacios (casi) tonelados. Espacios (casi) tonelados y espacios de Mackey.
- Espacios de Baire y espacios tonelados. Caso particular: espacios de Fréchet.
- Propiedades de estabilidad con respecto a: a) topologías inductivas. b) productos. c) complecciones.
- Un ejemplo de un subespacio de un espacio de Baire que no es tonelado. Enunciado de los teoremas de Dieudonné y Valdivia para estabilidad por subespacios.
- Aplicaciones: $\mathscr{K}(\Omega)$, $\mathscr{D}^m(\Omega)$ y $\mathscr{D}(\Omega)$ son tonelados.

*Descripción.* [Jar81, p. 219-227], [Köt69, p. 367-369] y [Sch71, p. 60-61]. En un e.l.c. todo entorno del origen absolutamente convexo y cerrado es un tonel; si, recíprocamente, todo tonel es un entorno del origen, se dice que el espacio es tonelado. El interés de los espacios tonelados reside en que en sus duales (véase la lección siguiente para el tratamiento general de espacios de aplicaciones lineales), para saber si un conjunto es equicontinuo basta conocer si es débil$^*$-acotado. La comprobación efectiva de que un determinado espacio es tonelado puede resultar a veces una tarea complicada; esta dificultad nos muestra la necesidad de estudiar las propiedades de estabilidad de la clase de los espacios tonelados. Como una consecuencia de estas propiedades, podemos ahora asegurar que todos los e.l.c. obtenidos a partir de espacios de Fréchet por medio de operaciones inductivas, productos topológicos y complecciones, son espacios tonelados; en particular, todos los espacios de funciones diferenciables que hemos introducido anteriormente son tonelados. □

**Lección 4.2 Espacios tonelados y el principio de la acotación uniforme.**

- Conjuntos equicontinuos de aplicaciones lineales y continuas. Equicontinuidad y acotación en espacios de aplicaciones lineales continuas. Equicontinuidad y completitud.

- Caracterización de los espacios tonelados: el teorema de la acotación uniforme.
- El teorema de Banach-Steinhaus: convergencia puntual de redes puntualmente acotadas de aplicaciones lineales continuas.
- Casi-completitud de los espacios $\mathscr{L}_{\mathfrak{G}}(E,F)$, $E$ tonelado y $F$ casi-completo.

*Descripción.* [Jar81, p. 219-227] y [Sch71, p. 82-87]. Un espacio localmente convexo $E$ es tonelado si, y sólo si, para cualquier espacio localmente convexo $F$, todo subconjunto de aplicaciones lineales y continuas de $E$ en $F$ que sea puntualmente acotado es equicontinuo. Así, el problema de clasificar los espacios localmente convexos según su comportamiento respecto al teorema de Banach-Steinhaus, queda totalmente resuelto con la consideración de los espacios tonelados. Como, en particular, todo espacio de Fréchet es tonelado, los resultados de esta lección nos permiten reencontrar los dados para espacios de Banach en la lección 5.1 de la asignatura *Análisis Funcional*. En otro orden de ideas, la tonelación de un e.l.c. $E$ es la propiedad esencial para demostrar que si $\mathfrak{G}$ es una familia saturada de conjuntos de $E$ que lo cubre, y $F$ es un e.l.c. casi-completo, entonces $\mathscr{L}_{\mathfrak{G}}(E,F)$ es también un espacio casi-completo. □

**Lección 4.3 Espacios tonelados y el teorema de la gráfica cerrada.**

- Dominio de la aplicación traspuesta: caracterización dual de las aplicaciones con gráfica cerrada.
- Aplicaciones casi-continuas: caracterización dual de las aplicaciones casi-continuas.
- El teorema de la gráfica cerrada de un espacio tonelado a un espacio de Fréchet; una aplicación del teorema de Banach-Dieudonné.
- Espacios $B$-completos y $B_r$-completos. El teorema de la gráfica cerrada de un espacio tonelado a un espacio $B_r$-completo. El teorema de la aplicación abierta de un espacio $B$-completo sobre un espacio tonelado.
- El teorema de Mahowald.

*Descripción.* [Jar81, p. 184-189 y 221]. Una aplicación lineal $T : E \longrightarrow F$ tiene gráfica cerrada si, y sólo si, el dominio de la aplicación traspuesta $\mathscr{D}(T^*)$ es $\sigma(F',F)$-denso; si además $E$ es tonelado, entonces $T$ es casi-continua, y así $\mathscr{D}(T^*)$ corta a los equicontinuos de $F'$ en conjuntos $\sigma(F',F)$-cerrados. Así las cosas, si $E$ es tonelado, $F$ un espacio de Fréchet y $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal con gráfica cerrada, el teorema de Krein-Šmulian, lección 3.10, asegura que $\mathscr{D}(T^*)$ es $\sigma(F',F)$-cerrado, y por consiguiente $\mathscr{D}(T^*) = F'$ y $T$ es continua. Esta demostración nos introduce en la teoría de gráfica cerrada de Pták, que extiende el razonamiento anterior a la clase adecuada de espacios de llegada, los $B_r$-completos. Para obtener el teorema de la aplicación abierta por un paso al cociente en el teorema de la gráfica cerrada, se introduce la clase de los espacios $B$-completos. Completamos la lección con el teorema de Mahowald, que caracteriza los espacios tonelados como la clase maximal de espacios de partida para la que es válido el teorema de la gráfica cerrada cuando se toman los espacios de Banach como espacios de llegada. □

**Lección 4.4 Tonelación y limites inductivos generalizados.**

- Sucesiones absorbentes y bornívoras en e.l.c. La topología límite inductivo generalizado asociada a una sucesión absorbente en un e.l.c. El teorema de completitud de Raikov.
- Espacios (casi-)$\chi_0$-tonelados. El teorema de localización de De Wilde-Houet.
- Límites inductivos de sucesiones crecientes de subespacios de un e.l.c. tonelado. Aplicación: límites inductivos estrictos de espacios normados que no localizan sucesiones convergentes.
- Espacios tonelados con complección de Baire. El teorema de Amemiya-Kh$\bar{o}$mura.
- Teorema de gráfica cerrada y localización entre espacios metrizables tonelados y espacios (LB).

*Descripción.* [Jar81, p. 253-257] y [Val82, p. 146-153] Para un e.l.c. $E[\mathfrak{T}]$ y una sucesión creciente $\mathscr{A} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos absolutamente convexos tales que $2A_n \subset A_{n+1}$ y $\bigcup A_n = E$ (brevemente, sucesión absorbente), la topología límite inductivo generalizado relativa a $\mathscr{A}$ y $\mathfrak{T}$ es la topología localmente convexa $\mathfrak{T}^{\mathscr{A}}$ más fina en $E$ que coincide con $\mathfrak{T}$ en los elementos de $\mathscr{A}$. En esta lección mostramos cómo algunos resultados importantes de tonelación en e.l.c. son consecuencia de unas pocas propiedades básicas de las topologías límite inductivo generalizado. Tras analizar distintas descripciones de bases de entornos del origen para $\mathfrak{T}^{\mathscr{A}}$, vemos cómo el teorema de Hahn-Banach nos da, de forma inmediata, el teorema de completitud de Raikov: $\widehat{E}[\widehat{\mathfrak{T}^{\mathscr{A}}}] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$, donde los cierres de $A_n$ están calculados en $\widehat{E}[\widehat{\mathfrak{T}^{\mathscr{A}}}]$. El resultado fundamental que liga tonelación con las topologías inductivas generalizadas es el teorema de De Wilde-Houet, el cual, en particular, nos dice que la topología de un e.l.c. tonelado coincide con la topología límite inductivo generalizando asociada a cualquier sucesión absorbente en él. Una aplicación del teorema de De Wilde-Houet y del teorema de Raikov permite demostrar que un e.l.c. metrizable y tonelado no puede ser cubierto por una sucesión creciente de conjuntos absolutamente convexos y cerrados sin punto interior, teorema de Amemiya-Kh$\bar{o}$mura. Ahora, las ideas expuestas en la lección 5.3 de la asignatura *Análisis Funcional* nos sirven para, sin esfuerzo adicional, obtener un teorema de gráfica cerrada y localización entre un espacio metrizable tonelado y un espacio (LB). Completamos la lección dando algunas aplicaciones concernientes a límites inductivos e indicando cómo construir espacios metrizables no tonelados. □

**Lección 4.5 Aplicaciones a los espacios de funciones continuas.**

- Casi-tonelación de los espacios $C_p(X)$.
- Soportes y equicontinuidad en $C_c(X)$.

- Conjuntos acotantes y $\mu$-espacios.
- El teorema de Nachbin-Shirota.
- Caracterización de los espacios $C_p(X)$ tonelados.

*Descripción.* [Jar81, p. 233-236]. Esta lección muestra, una vez más, la interacción entre las propiedades de un espacio topológico $X$ y las propiedades de su espacio de funciones continuas $C(X)$. Desde el punto de vista de la (casi) tonelación, estudiamos $C(X)$ dotado de la topología de convergencia puntual, $C_p(X)$, y dotado de la topología de convergencia uniforme sobre compactos, $C_c(X)$. El resultado fundamental que establecemos es el teorema de Nachbin-Shirota, en el cual se establece que, *para un espacio topológico completamente regular $X$, son equivalentes:*

*(i)* $C_c(X)$ *es tonelado.*

*(ii)* $X$ *es un $\mu$-espacio: si $S \subset X$ es un conjunto cerrado tal que $f(S)$ es acotado para toda $f \in C(X)$, entonces $S$ es compacto.*

La parte delicada de la prueba, (ii) $\Rightarrow$ (i), se apoya en un resultado preliminar sobre equicontinuidad en $C_c(X)'$ que es establecido gracias a la tonelación del espacio de Banach $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$. $\square$

**Lección 4.6 Espacios localmente convexos semirreflexivos y reflexivos.**

- El espacio bidual. Inmersión de un espacio en su bidual. El bidual como unión de las débil$^*$-clausuras de los acotados del espacio.
- Semirreflexivdad. Propiedades de estabilidad de los e.l.c. semirreflexivos.
- Topologías sobre el bidual. Inmersión de un espacio casi-tonelado en su bidual fuerte.
- Reflexividad. Propiedades de estabilidad de los e.l.c. reflexivos.
- Espacios de Fréchet reflexivos y sus duales. Subespacios. Cocientes de espacios de Banach reflexivos.

*Descripción.* [Köt79, p. 295-308]. Habiendo estudiado en la lección 4.9 de la asignatura *Análisis Funcional* los espacios de Banach reflexivos, abordamos en esta lección el estudio general de la semirreflexividad y reflexividad en e.l.c. Si $E[\mathfrak{T}]$ es un e.l.c., entonces existe una inmersión canónica de $E$ en su bidual $E'' := \left(E'[\beta(E',E)]\right)'$. Si esta inmersión es sobreyectiva, entonces se dice que $E$ es semirreflexivo. Sin más que aplicar el teorema de Alaoglu-Bourbaki y el teorema del bipolar, los e.l.c. semirreflexivos quedan caracterizados como aquéllos en los que los conjuntos acotados son relativamente débilmente compactos. Los e.l.c. reflexivos $E[\mathfrak{T}]$ son, dentro de los e.l.c. semirreflexivos, aquéllos para los que se puede identificar $E[\mathfrak{T}]$ con $E''\left[\beta(E'',E')\right]$; en otras palabras, los espacios reflexivos son los espacios semirreflexivos casi-tonelados o, lo que en este caso es lo mismo, los espacios semirreflexivos tonelados. Así, en espacios de Fréchet, como en los espacios de Banach, la semirreflexividad equivale a la reflexividad, y ésta es equivalente, a su vez, a la reflexividad de los duales fuertes. Junto a estos tópicos, estudiamos en esta lección las propiedades de estabilidad de las clases de espacios semirreflexivos y reflexivos, algunas de las cuales nos vemos obligados a desarrollar en espacios de Fréchet y espacios de Banach por no ser ciertas en general para espacios localmente convexos. □

**Lección 4.7 Espacios semi-Montel y espacios de Montel.**

- Espacios semi-Montel. Caracterización. Espacios de Montel.
- Estabilidad de los espacios (semi-)Montel.
- Espacios de Fréchet-Montel. El teorema de separabilidad de Dieudonné. Caracterización de los espacios de Fréchet que son de Montel.
- Aplicación a los espacios de funciones continuas: caracterización de los $C_c(X)$ de Montel.

*Descripción.* [Jar81, p. 229-236] y [Köt69, p. 369-372]. Si $\Omega$ es un abierto de $\mathbb{C}$, un clásico teorema debido a P. Montel establece que *cada familia acotada en el espacio de las funciones holomorfas $\mathscr{H}(\Omega)$ es una familia normal*; expresado en otros términos, el teorema de Montel asegura que en el espacio de Fréchet $\mathscr{H}(\Omega)$, los subconjuntos acotados y los subconjuntos relativamente compactos coinciden. En general, un e.l.c. se dice de Montel si es tonelado y sus conjuntos acotados coinciden con los relativamente compactos. Un espacio de Montel es, en particular, reflexivo, y en él, las sucesiones débilmente convergentes son convergentes en su topología. De especial interés es la clase de los espacios de Fréchet que a su vez son de Montel, dentro de los cuales se encuentra el espacio $\mathscr{H}(\Omega)$. Un teorema de Dieudonné establece que todo espacio de Fréchet-Montel es separable; más aún, los espacios de Fréchet-Montel están caracterizados como los espacios de Fréchet separables, en cuyos duales las sucesiones débilmente convergentes son fuertemente convergentes. En cuanto al estudio de los espacios de funciones continuas que realizamos, es remarcable que, si bien en general la propiedad de ser un espacio de Montel no es equivalente a la reflexividad, para un espacio $C_c(X)$ son equivalentes el ser de Montel, semi-Montel, semirreflexivo y reflexivo; cualquiera de estas condiciones es, a su vez, equivalente a que $X$ sea un espacio topológico discreto. □

**Lección 4.8 Espacios de Schwartz.**

- Definición de espacio de Schwartz. Caracterizaciones en términos de entornos y acotados. Espacios de Schwartz y espacios semi-Montel.
- $\mathscr{E}(\Omega)$ es un espacio de Schwartz.
- Propiedades de estabilidad de la clase de espacios de Schwartz.
- $\mathscr{H}(\Omega)$, $\mathscr{D}_k(\Omega)$ y $\mathscr{D}(\Omega)$ son espacios de Schwartz.
- Caracterización dual de los espacios de Schwartz.

*Descripción.* [Hor66] y [Jar81, p. 201-204]. En esta lección estudiamos los resultados sobre espacios de Schwartz que son indispensables para analizar la estructura de los espacios que intervienen en la teoría de las distribuciones. Un e.l.c. $E[\mathfrak{T}]$ se dice que es un espacio de Schwartz si cada entorno del origen absolutamente convexo $U$ contiene otro entorno del origen $V$ que es precompacto en la topología seminormada asociada a $U$ en $E$. En un espacio de Schwartz los conjuntos acotados son precompactos, y así, los espacios de Schwartz casi-completos son espacios semi-Montel. El espacio de las funciones infinitamente diferenciables en un abierto $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{E}(\Omega)$, nos proporciona el primer ejemplo notable de la clase de espacios de Schwartz; las propiedades de estabilidad de esta clase nos permiten ahora deducir que $\mathscr{H}(\Omega)$, $\mathscr{D}_k(\Omega)$ y $\mathscr{D}(\Omega)$ son también espacios de Schwartz. Finalizamos la lección analizando los equicontinuos del dual de un espacio de Schwartz; en concreto, usando el teorema de Schauder para aplicaciones precompactas entre espacios normados, lección 6.4 de la asignatura *Análisis Funcional*, establecemos que un e.l.c. $E[\mathfrak{T}]$ es de Schwartz si, y sólo si, para cada equicontinuo $A \subset E'$, existe un equicontinuo absolutamente convexo débil$^*$-cerrado $B \subset E'$ tal que $A \subset B$ y $A$ es relativamente compacto en el espacio de Banach generado por $B$ en $E'$, $(E')_B$. Como veremos posteriormente, esta caracterización es particularmente útil para obtener que el espacio de distribuciones $\mathscr{D}'(\Omega)$ es el límite inductivo de una familia de espacios de Banach. □

**Lección 4.9 Espacios bornológicos y ultrabornológicos.**

- Aplicaciones localmente acotadas entre e.l.c. Definición de espacio bornológico. Caracterizaciones de los espacios bornológicos: la definición de Bourbaki. Los espacios bornológicos como límites inductivos de espacios normados.
- Espacios bornológicos y espacios casi-tonelados. La topología bornológica asociada a un e.l.c. Propiedades de estabilidad.
- Espacios ultrabornológicos. Caracterizaciones. Los espacios ultrabornológicos como límites inductivos de espacios de Banach.
- Espacios ultrabornológicos y espacios tonelados. Algunas propiedades de estabilidad.
- Aplicaciones con gráfica rápidamente cerrada. Caracterización de los espacios ultrabornológicos a través del teorema de la gráfica cerrada.
- Caracterización de los espacios $C_b(X)$ ultrabornológicos con la topología estricta.
- Carácter ultrabornológico de los espacios de las distribuciones.

*Descripción.* [Jar81, p. 271-288] y [Köt69, p. 379-386]. Una aplicación lineal entre espacios normados que lleva acotados en acotados es continua. Esta propiedad no se verifica entre e.l.c. cualesquiera. El concepto de espacio bornológico está originado por el deseo de subsanar esta anomalía, y así, un espacio es bornológico si toda aplicación lineal de él sobre otro e.l.c., que lleva acotados en acotados, es continua. En términos intrínsecos de la estructura vectorial-topológica de un e.l.c., un espacio es bornológico si, y sólo si, todo disco bornívoro es un entorno del origen (definición de Bourbaki). Así, cada espacio bornológico es casi-tonelado, y si es localmente completo, es tonelado. Por otro lado, un e.l.c. es bornológico si, y sólo si, es el límite inductivo de una familia de espacios normados, caracterización que, como veremos, es bastante operativa para estudiar algunas situaciones concretas.

Todo e.l.c. bornológico $E[\mathfrak{T}]$ es el límite inductivo de una familia de espacios normados, y si además es localmente completo, entonces es el límite inductivo de una familia de espacios de Banach. La clase de los e.l.c. que son representables como límites inductivos de espacios de Banach, son conocidos en la literatura con el nombre de espacios ultrabornológicos, que son, en esta lección, objeto de nuestro estudio. Todos los resultados establecidos en anteriormente para espacios bornológicos se extienden al contexto de espacios ultrabornológicos con los cambios obvios de acotados por discos de Banach y de discos bornívoros por discos que absorben discos de Banach. El interés fundamental de los espacios ultrabornológicos reside en que éstos constituyen una amplia clase de e.l.c. a la que se pueden extender, tomándolos como espacios de partida, todos los teoremas de gráfica cerrada válidos para espacios de Banach como espacios de partida. Resulta pues interesante saber si determinados espacios concretos son ultrabornológicos. Entre otros, analizamos los espacios que intervienen en la teoría de las distribuciones: $\mathscr{E}(\Omega)$ y $\mathscr{D}_k(\Omega)$ son ultrabornológicos por ser espacios de Fréchet. $\mathscr{D}(\Omega)$ es ultrabornológico por ser un espacio (LF). La prueba de que $\mathscr{D}'(\Omega)$ es ultrabornológico con su topología fuerte es algo más complicada y utiliza, esencialmente, el teorema de completitud de Grothendieck junto con el hecho de que $\mathscr{D}(\Omega)$ es un espacio de Schwartz. $\square$

**Lección 4.10 Aplicación a los espacios de funciones continuas.**

- Espacios topológicos realcompactos.
- Segmentos en el retículo $C(X)$ y discos de Banach en $C_c(X)$.
- El teorema de Nachbin-Shirota.
- Un espacio tonelado que no es bornológico.
- Compacidad de los conjuntos acotantes en un espacio realcompacto.

*Descripción.* [BNS77, p. 23] y [Jar81, p. 283-288]. Volvemos aquí al estudio del espacio de funciones continuas en un espacio completamente regular $X$, y consideramos el problema de cómo es reflejado, por propiedades de $X$, el carácter bornológico de $C_c(X)$. En la lección anterior nos hemos ocupado de $C_b(X)$ con la topología estricta. Para $C_c(X)$, su carácter bornológico está caracterizado en el siguiente teorema de Nachbin-Shirota:

*Para un espacio completamente regular $X$ son equivalentes:*

*(i) $X$ es realcompacto.*

*(ii) $C_c(X)$ es ultrabornológico.*

*(iii)* $C_c(X)$ *es bornológico.*

En particular, si $C_c(X)$ es bornológico entonces es tonelado, y en consecuencia, si $X$ es realcompacto entonces es un $\mu$-espacio (lección 4.5). La prueba de este teorema está basada en el hecho de que todo intervalo en el retículo $C(X)$ es un disco de Banach en $C_c(X)$, lo que se constata fácilmente haciendo uso de la caracterización de los discos de Banach a través de series convexas, lección 2.3. Como ya sabemos, lección 4.4, hay numerosos espacios bornológicos que no son tonelados. En 1953, fue planteado por Dieudonné el problema de determinar un espacio tonelado que no fuese bornológico. Los teoremas de Nachbin-Shirota, estudiados aquí y en la lección 4.5, permiten construir un espacio satisfaciendo la demanda de Dieudonné: si $X$ es un $\mu$-espacio no realcompacto, entonces $C_c(X)$ es un espacio tonelado que no es bornológico. □

**Lección 4.11 Espacios (DF) de Grothendieck.**

- Sucesiones fundamentales de acotados y metrizabilidad.
- Casi-$\chi_0$-tonelación del dual fuerte de un e.l.c. metrizable: un teorema de A. Grothendieck. Bidual de un e.l.c. metrizable.
- Espacios (DF). Localización de la topología de un espacio (DF). Consecuencias: continuidad de aplicaciones lineales; casi-completitud y completitud de espacios (DF).
- Propiedades de estabilidad. Espacios (DF) bornológicos.

*Descripción.* [Jar81, p. 392-403] y [Köt69, p. 257-263]. El dual fuerte de $E'\left[\beta(E',E)\right]$ de un espacio metrizable $E[\mathfrak{T}]$ es un espacio completo con una sucesión fundamental de conjuntos acotados; Grothendieck estableció que todo tonel bornívoro que es intersección numerable de entornos del origen en $E'\left[\beta(E',E)\right]$ es, asimismo, un entorno del origen en este espacio. Siguiendo la terminología introducida en la lección 4.4, los resultados anteriores se expresan diciendo que el dual fuerte de un e.l.c. metrizable es un espacio casi-$\chi_0$-tonelado con una sucesión fundamental de acotados. Estas dos propiedades son las que definen la clase de los espacios (DF) de Grothendieck que estudiamos en esta lección. Como resultados más sobresalientes destacamos los ya comentados, que permiten obtener, en particular, que el bidual fuerte de un e.l.c. metrizable es un espacio de Fréchet, y los resultados relativos a la localización de la topología de un espacio (DF) en una sucesión fundamental de acotados, que nosotros presentamos aquí como una simple consecuencia del estudio realizado en la lección 4.4. □

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[BNS77], [Gro73], [Hor66], [Jar81], [Köt69], [Köt79], [PCB80], [Sch71], [Val82].

Capítulo 5

# El teorema de la gráfica cerrada

**TEMARIO**



El primer teorema de gráfica cerrada fue probado por S. Banach para (F)-espacios. Este teorema llegó rápidamente a ser un resultado fundamental en el Análisis Funcional y sus aplicaciones. Con posterioridad, J. Dieudonné y L. Schwartz generalizaron este teorema para espacios (LF) estrictos, y G. Köthe para espacios (LF) cualesquiera. V. Pták constató que el teorema de la gráfica cerrada es válido entre espacios tonelados y espacios $B_r$-completos (lección 4.3). A pesar de su gran belleza, el teorema de Pták no es lo bueno que cabría esperar desde el punto de vista de las aplicaciones (por ejemplo, los espacios $\mathscr{D}'(\Omega)$ no son $B_r$-completos). Grothendieck desarrolló, con métodos de la teoría de la categoría, una prueba del teorema de la gráfica cerrada entre espacios (LF) que además le permitió dar un teorema de localización. Al mismo tiempo, conjeturó la validez de este resultado para clases de espacios suficientemente estables que contuvieran a los espacios $\mathscr{D}'(\Omega)$ de las distribuciones. Los resultados de L. Schwartz para espacios de Suslín resuelven el problema en el caso separable y, en particular, en $\mathscr{D}'(\Omega)$, y son por fin los resultados de Słowikowski los que aportan la solución general a la conjetura de Grothendieck.

En este capítulo presentamos la teoría de Słowikowski-Raikov y De Wilde, utilizando las técnicas de localización de Grothendieck tal y como han sido desarrolladas por M. Valdivia. Entre otros resultados, resaltamos que nuestro método de exposición nos conduce, de forma natural, a probar que los e.l.c. localmente completos de Suslín son espacios de De Wilde, lo que nos proporciona una prueba alternativa de los teoremas de gráfica cerrada entre espacios de Baire y espacios de Suslín localmente completos. Con el presente tema culminamos nuestro objetivo de clasificar los e.l.c. según su comportamiento respecto a los tres Principios Fundamentales del Análisis Funcional.

**Lección 5.1 El teorema de Banach-Schauder.**

- Bases de entornos del origen en un espacio de Fréchet: sucesiones completantes.
- El teorema de la gráfica cerrada entre espacios de Fréchet.
- El teorema de la aplicación abierta entre espacios de Fréchet.

*Descripción.* Ya sabemos, después de la lección 4.3, que los teoremas de la gráfica cerrada y de la aplicación abierta se verifican entre espacios de Fréchet. Sin embargo, utilizando ideas similares a las que desarrollamos en la lección 5.3 de la asignatura *Análisis Funcional*, podemos dar una prueba alternativa que tiene la ventaja de poder asegurar la validez del teorema de la aplicación abierta cuando el rango es de segunda categoría en el espacio de llegada, teorema de Banach-Schauder. De forma esquemática, la prueba del teorema de la gráfica cerrada es la siguiente: sean $E$ y $F$ dos espacios de Fréchet y $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal con gráfica cerrada; dada una base de entornos del origen $V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_n \supset \ldots$ absolutamente convexos y cerrados en $F$ entonces, para cada elección de vectores $x_n \in V_n$, $n = 1,2\ldots$, y de escalares $0 \leq \lambda_n \leq 1$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ es convergente y $\sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n x_n \in V_k$, $k = 1,2,\ldots$ Para cada $n \in N$, la preimagen $T^{-1}(V_n)$ es tal que su cierre $\overline{T^{-1}(V_n)}$ es un entorno del origen, y gracias a que $T$ tiene gráfica cerrada, se obtiene que $\operatorname{int}\left(\overline{T^{-1}(V_n)}\right) \subset T^{-1}(V_n)$, $n = 1,2\ldots$, quedando así establecido que $T$ es continua. Este esquema de prueba es el apropiado para obtener las potentes extensiones que estudiaremos en lecciones posteriores. □

**Lección 5.2 Los resultados de A. Grothendieck.**

- Localización de aplicaciones lineales continuas sobre espacios (LF).
- El teorema de la gráfica cerrada entre espacios (LF).
- La conjetura de A. Grothendieck.

*Descripción.* Si $E$ es un espacio de Fréchet, $F = \varinjlim F_n$ es un espacio (LF) y $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal con gráfica cerrada, entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-1}(F_{n_0})$ es de segunda categoría en $E$. Una utilización adecuada de los razonamientos hechos en la lección anterior nos da que $T(E) \subset F_{n_0}$ y que $T : E \longrightarrow F_{n_0}$ es una aplicación continua, teorema de Grothendieck. La pretensión de Grothendieck era obtener un teorema de gráfica cerrada en el que se pudieran tomar, tanto en partida como en llegada, los espacios de distribuciones $\mathscr{D}'(\Omega)$. Ante la imposibilidad de poder incluir en el rango los espacios $\mathscr{D}'(\Omega)$, Grothendieck conjetura que su resultado debe ser cierto para una clase de espacios rango que contenga a los espacios de Fréchet y que sea estable para las operaciones habituales de tipo numerable (subespacios, cocientes separados, productos y sumas directas localmente convexas numerables); en particular, para el espacio $\mathscr{D}'(\Omega)$. □

**Lección 5.3 El teorema de la gráfica cerrada para $\mathscr{D}'(\Omega)$.**

- La estructura de Słowikowski-Raikov y De Wilde en $\mathscr{D}'(\Omega)\left[\beta(\mathscr{D}'(\Omega),\mathscr{D}(\Omega))\right]$.
- El teorema de la gráfica cerrada de un espacio de Fréchet a $\mathscr{D}'(\Omega)$. El teorema de la gráfica cerrada de un espacio ultrabornológico a $\mathscr{D}'(\Omega)$. El teorema de la gráfica cerrada de $\mathscr{D}'(\Omega)$ a $\mathscr{D}'(\Omega)$.
- Estructura susliniana de $\mathscr{D}'(\Omega)$. Comentario sobre los resultados de gráfica boreliana de L. Schwartz.

*Descripción.* Consideramos $\mathscr{D}(\Omega)$ como el límite inductivo de una sucesión creciente de espacios de Fréchet, $\mathscr{D}(\Omega) = \varinjlim \mathscr{D}_{K_m}(\Omega)$, y sea $(U_n^m)$ un sistema fundamental de entornos del origen en $\mathscr{D}_{K_m}(\Omega)$, $m = 1,2,\ldots$ ($(K_m)_m$ es una sucesión fundamental de compactos en $\Omega$). Para $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ pongamos $U_\alpha = \Gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{a_n}^n\right)$ y sea $A_\alpha = U_\alpha^0$, donde las polares están calculadas en la dualidad $\left\langle \mathscr{D}(\Omega),\mathscr{D}'(\Omega)\right\rangle$. La familia $\left\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right\}$ es una familia de discos de Banach en $\mathscr{D}'(\Omega)\left[\beta(\mathscr{D}'(\Omega),\mathscr{D}(\Omega))\right]$ que nos da la estructura de Słowikowski-Raikov y De Wilde en este espacio. No es ahora difícil, con argumentos similares a los desarrollados en la lección 5.1, levantar esta estructura mediante una aplicación con gráfica cerrada, y obtener así un teorema de gráfica cerrada de un espacio de Fréchet en el espacio $\mathscr{D}'(\Omega)$. Ahora, utilizando el hecho de que $\mathscr{D}'(\Omega)$ es ultrabornológico, lección 4.9, se tiene un teorema de gráfica cerrada de $\mathscr{D}'(\Omega)$ en $\mathscr{D}'(\Omega)$.

En otro orden de ideas, la familia anterior $\left\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right\}$ dota a $\mathscr{D}'(\Omega)$ con su topología fuerte de estructura de espacio $K$-analítico, lo que unido a que $\mathscr{D}(\Omega)$ es separable, nos da un a prueba simple de que $\mathscr{D}'(\Omega)\left[\beta(\mathscr{D}'(\Omega),\mathscr{D}(\Omega))\right]$ es un espacio de Suslín. L. Schwartz probó un teorema de gráfica boreliana entre espacios de Banach y espacios de Suslín, mostrando que la clase de los espacios de Suslín es estable por las operaciones de la conjetura de Grothendieck. Con estas pruebas y comentarios que resuelven la conjetura de Grothendieck en el caso separable, concluimos esta lección. □

**Lección 5.4 Espacios con redes estrictas.**

- Redes completantes y redes estrictas en espacios localmente convexos.
- Propiedad de acotación de las redes completantes.
- Ejemplos en los espacios de Fréchet, (LF) y duales fuertes de (LF).
- Propiedades de estabilidad.
- El teorema de la gráfica cerrada entre un espacio de Baire y un espacio con red estricta.
- El teorema de la gráfica cerrada entre espacios ultrabornológicos y espacios con red estricta.
- Solución a la conjetura de Grothendieck.
- El teorema de la aplicación abierta de espacios con red estricta sobre espacios de Baire.
- Espacios de Fréchet generados por sucesiones completantes.

- El teorema de localización de M. De Wilde.
- Un espacio de Baire que sea de De Wilde es un espacio de Fréchet.

*Descripción.* Si $\left\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right\}$ es la estructura descrita anteriormente en $\mathscr{D}'(\Omega)$ y para los enteros positivos $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$ ponemos

$$C_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \bigcup \left\{A_\alpha : \alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}},\, a_j = n_j,\, j = 1,2,\ldots,k\right\},$$

entonces la familia $\{C_{n_1 n_2 \ldots n_k} : k, n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$ tiene las siguientes propiedades:

(a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \mathscr{D}'(\Omega)$ y $C_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{n_1 n_2 \ldots n_k m}$, $k = 1,2,\ldots$

(b) Si $\alpha = (n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y tomamos $x_k \in C_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ y $0 \le \lambda_k \le 1$ con $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ converge y $\sum_{k=m}^{\infty} \lambda_k x_k \in C_{n_1 n_2 \ldots n_m}$, $m = 1,2,\ldots$

La estructura así obtenida, $\left\{C_{n_1 n_2 \ldots n_k} : k, n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\right\}$, es lo que se llama una red estricta en $\mathscr{D}'(\Omega)$. Los espacios con red estricta son también conocidos en la literatura como espacios de De Wilde. Los espacios de De Wilde constituyen una clase estable para las operaciones de la conjetura de Grothendieck y, como vamos a ver en la lección siguiente, se pueden tomar como espacios de llegada en teoremas de gráfica cerrada con espacios de Baire en partida.

A continuación vemos cómo las ideas desarrolladas en la lección 5.3 nos sirven para dar una prueba del teorema de la gráfica cerrada de De Wilde: si $E$ es un e.l.c. de Baire, $F$ un e.l.c. con red estricta y $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal con gráfica cerrada, entonces $T$ es continua. Este resultado, junto con las propiedades de estabilidad descritas en la lección anterior, solucionan positivamente la conjetura de Grothendieck, describiendo amplias clases de espacios donde se verifica el teorema de la gráfica cerrada. Por un paso al cociente en el teorema de la gráfica cerrada, y gracias a las propiedades de estabilidad de los espacios con red estricta, obtenemos el teorema de la aplicación abierta de un espacio con red estricta sobre un espacio de Baire. Por supuesto, ponemos de manifiesto que todos los resultados de esta lección siguen siendo válidos cuando, en vez de los espacios de Baire, se consideran espacios ultrabornológicos, con lo que los teoremas establecidos adquieren un alcance más que notable.

Si $E$ es un e.l.c. de Baire, $F$ un espacio con red estricta $\mathscr{W} = \{C_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ y $T$ una aplicación lineal con gráfica cerrada de $E$ en $F$, entonces existe $\alpha = (n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $\operatorname{int}\left(\overline{T^{-1}(C_{n_1 n_2 \ldots n_k})}\right) \neq \emptyset$, $k = 1,2,\ldots$ La prueba del teorema de gráfica cerrada estudiado en la lección anterior está basada en el hecho de que $\operatorname{int}\left(\overline{T^{-1}(C_{n_1 n_2 \ldots n_k})}\right) \subset T^{-1}(C_{n_1 n_2 \ldots n_k})$, $k = 1,2,\ldots$ Esta misma propiedad nos permite probar un teorema de localización para $T$: si $F_\alpha$ es la intersección de los espacios vectoriales generados por $C_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, entonces la familia

$$\left\{\frac{1}{2^k} C_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cap F_\alpha : k = 1,2,\ldots\right\}$$

es base de entornos del origen para una topología localmente convexa y separada en $F_\alpha$ más fina que la inducida por $F$, para la cual $F_\alpha$ es un espacio de Fréchet y $T(E)$ está contenido en $F_\alpha$, siendo $T : E \longrightarrow F_\alpha$ continua. Esta extensión del teorema de localización de Grothendieck, lección 5.2, permite probar que un espacio de Baire que sea un espacio de De Wilde es un espacio de Fréchet. En resumidas cuentas, la solución de Słowikowski-Raikov y De Wilde a la conjetura de Grothendieck aísla las propiedades óptimas de los espacios de Fréchet en los espacios de partida y llegada de sus teoremas de gráfica cerrada, de forma que cuando éstas confluyen en un mismo espacio, éste es, necesariamente, un espacio de Fréchet. □

**Lección 5.5 Espacios de Suslín y espacios de De Wilde.**

- Redes acotadas en un e.l.c. Familias ordenadas de conjuntos acotados asociadas.
- Familias ordenadas de discos de Banach y espacios con red estricta.
- Los espacios de Suslín (también los $K$-analíticos) localmente completos son espacios de De Wilde.

*Descripción.* En el espacio de distribuciones $\mathscr{D}'(\Omega)$ existe una familia $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$ de discos de Banach con las siguientes propiedades:

(a) $\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\} = \mathscr{D}'(\Omega)$.

(b) $A_\alpha \subset A_\beta$ si $\alpha = (a_n)$ y $\beta = (b_n)$ son tales que $a_n \leq b_n$, $n = 1,2,\ldots$

Hemos visto en la lección 5.3 cómo se puede asociar a esta familia una red que nos da, en $\mathscr{D}'(\Omega)$, una estructura de espacio de De Wilde. Como resultado central de esta lección establecemos que un espacio localmente convexo y localmente completo $E[\mathfrak{T}]$ es de De Wilde si, y sólo si, existe una familia $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$ de discos de Banach en $E[\mathfrak{T}]$ verificando las propiedades (a) y (b) anteriores. Este resultado nos permite ahora probar muy fácilmente que, en el caso localmente completo, los e.l.c. de Suslín (más aún, los espacios $K$-analíticos) son espacios de De Wilde, y así, en este caso, los teoremas de gráfica cerrada para espacios de Suslín están englobados en los teoremas de gráfica cerrada que hemos obtenido en la lección 5.4. □

**Lección 5.6 Aplicaciones del teorema de la gráfica cerrada.**

- Un teorema de Mazur-Orlicz.
- $\ell^\infty(E)$ es de De Wilde si $E$ es de De Wilde y localmente completo.
- Condiciones suficientes para que una base débil en un e.l.c. sea una base de Schauder.
- Teorema de M. De Wilde.
- Aplicación a los espacios de funciones continuas.

*Descripción.* En la lección 5.4 de la asignatura *Análisis Funcional* hemos dado algunas aplicaciones del teorema de la gráfica cerrada entre espacios de Banach. Aquí vamos a dar algunas aplicaciones de los teoremas de gráfica cerrada que hemos establecido en este capítulo. La primera, consecuencia de los teoremas de localización (lección 5.4), es un celebrado teorema de Mazur-Orlicz que asegura que si en un e.v.t. metrizable y completo la envoltura absolutamente convexa de todo acotado es acotada, entonces el espacio en cuestión es un espacio localmente convexo, es decir, un espacio de Fréchet. La otra aplicación que presentamos es un teorema de la base débil (presentado para espacios de Banach en la lección 5.5 de la asignatura *Análisis Funcional*) que nos da la continuidad de los coeficientes funcionales de una base en un espacio localmente convexo. Este resultado lo obtenemos aquí para espacios ultrabornológicos de De Wilde y localmente completos, entre los que se encuentran los espacios de las distribuciones. $\square$

**Bibliografía utilizada en el capítulo:**
[Wil78], [Gro55], [Köt79], [Trè67], [Val82].

Capítulo 6

# Compacidad y compacidad débil en espacios localmente convexos

**TEMARIO**



Los conjuntos compactos y débilmente compactos de un espacio localmente convexo juegan un papel importante en muchas cuestiones del Análisis. Entre ellas están las caracterizaciones de reflexividad, caracterizaciones de subconjuntos con elementos de norma mínima y teoría de aproximación convexa, rangos de medidas vectoriales, convergencia puntual de sucesiones de funciones, teoremas minimax, propiedades de separación de conjuntos convexos, etc. La intención de este capítulo es probar los principales resultados sobre conjuntos convexos compactos y sobre conjuntos débilmente compactos en espacios localmente convexos, con especial énfasis en los espacios de Banach.

La primera parte del capítulo está dedicada al teorema de Krein-Milman. El teorema de Krein-Milman es, sin duda, uno de los resultados más potentes en la teoría de espacios localmente convexos, al menos, y en particular, de aquellos resultados que dependen de argumentos sobre compacidad y convexidad. Estudiamos aquí el teorema de Krein-Milman en espacios localmente convexos, así como algunas de sus aplicaciones más importantes. Damos una prueba del teorema de representación integral de G. Choquet en el caso metrizable, del que derivamos como aplicación (entre otras) el bien conocido teorema de Rainwater, que suministra un criterio para decidir si una sucesión en un espacio de Banach es débilmente convergente.

En la segunda parte del capítulo estudiamos compacidad débil en espacios localmente convexos, y en ella probamos los resultados fundamentales debidos a Eberlein, Šmulian y Grothendieck sobre compacidad numerable y sucesional. El elemento fundamental en nuestra exposición es la propiedad del intercambio de límites iterados introducida por Grothendieck. Los resultados sobre compacidad numerable y sucesional son, como es usual, primero probados en espacios de funciones continuas con la topología de convergencia puntual y luego aplicados a las clases adecuadas de espacios localmente convexos.

**Lección 6.1 El teorema de Krein-Milman.**

- Hiperplanos y variedades soporte de conjuntos convexos.
- Variedades soporte 0-dimensionales: puntos extremales. Caracterizaciones.
- Existencia de puntos extremales en conjuntos compactos.
- El teorema de Krein-Milman.
- Equivalencia con el Principio del Máximo de Bauer.

*Descripción.* [Rud79, p. 69-72], [Cho69a, p. 93-112]. El teorema de Krein-Milman (que es llamado teorema de Minkowski en el caso de espacios de dimensión finita) representa uno de los primeros y más elegantes resultados relativos a conjuntos convexos compactos en e.l.c. El propósito de esta lección es dar una prueba de este teorema. El teorema de Krein-Milman está relacionado con el problema de representar un conjunto convexo y cerrado como la envoltura cerrada y convexa de un subconjunto de sí mismo, identificable y suficientemente pequeño, más o menos en la misma forma que en un espacio de dimensión finita, un poliedro convexo está determinado por sus vértices y una bola por su frontera. El teorema asegura que, en un e.l.c., todo conjunto convexo compacto es la envoltura cerrada y convexa de sus puntos extremales. Nos entretenemos en demostrar que para espacios de dimensión finita se puede omitir la clausura (teorema de Minkowski). El hecho principal para la demostración del teorema de Krein-Milman, es mostrar que todo conjunto convexo compacto posee, al menos, un punto extremal, lo cual se obtiene haciendo uso del lema de Zorn y del teorema de Hahn-Banach. □

**Lección 6.2 Ejemplos y aplicaciones del teorema de Krein-Milman.**

- Extremales de la bola unidad de $c_0$, $\ell^1$, $\ell^\infty$, $L^1$, $L^\infty$, $C_b(X)$.
- Extremales de la bola unidad de un normado estrictamente convexo. Aplicación a $\ell^p$ y $L^p$, $1 < p < \infty$.
- Extremales del espacio de medidas de Radon $\mathscr{M}(K)$. El teorema de Banach-Stone.
- Espacios de Banach sin predual.

*Descripción.* [Köt69, p. 333-336]. Calculamos en esta lección los puntos extremales de las bolas unidad de los espacios de Banach que hemos venido estudiando sistemáticamente en la asignatura

*Análisis Funcional*. Dado que la bola dual de un espacio normado es débil$^*$-compacta, un espacio de Banach que sea dual de un espacio normado ha de tener una bola que, necesariamente, posea puntos extremales. Así las cosas, la no existencia (o la existencia insuficiente) de puntos extremales en las bolas de los espacios $c_0$, $L^1$ y $C_b(X)$ (siendo $X$ completamente regular, no trivial) nos dice que estos espacios no pueden ser el dual de ningún espacio normado.

En otro orden de ideas, resaltemos que el cálculo de los extremales de la bola unidad del espacio de medidas de Radon $\mathscr{M}(K)$ sobre un compacto nos permite demostrar el clásico teorema de Banach-Stone: dos espacios topológicos compactos $K_1$ y $K_2$ son homeomorfos si, y sólo si, sus espacios de funciones continuas son norma-isomorfos. $\square$

**Lección 6.3 Reformulación baricéntrica del teorema de Krein-Milman.**

- Definición de baricentro de una medida. Ejemplos sencillos: envolturas convexas finito-dimensionales.
- Existencia de baricentros. Los puntos de la envoltura convexa de un compacto como baricentros.
- Reformulación baricéntrica del teorema de Krein-Milman.
- Caracterización de Bauer de los puntos extremales.
- Recíproco de Milman para el teorema de Krein-Milman.

*Descripción.* [Cho69a, Chapter 6]. Si $K$ es un compacto convexo de un e.l.c. $E$ y $\mu$ es una medida de Radon (de probabilidad) sobre $K$, se dice que un punto $x$ de $E$ es un baricentro para $\mu$ si $f(x) = \int f\,d\mu$ para toda $f \in E'$. El teorema de Krein-Milman, tal y como lo hemos estudiado en la lección 6.1, admite la siguiente reformulación analítica: cada punto de un subconjunto compacto y convexo $K$ de un e.l.c. $E$ es el baricentro de una medida de Radon (de probabilidad) sobre $K$ que está soportada por la clausura de los extremales de $K$. Es objetivo de esta lección mostrar la equivalencia de este enunciado analítico y del enunciado geométrico del teorema de Krein-Milman. Por otra parte, la caracterización de Bauer de los extremales en términos de las medidas que los representan, nos permite obtener muy fácilmente el recíproco de Milman para el teorema de Krein-Milman, el cual nos garantiza que si $M$ es un subconjunto de un compacto convexo $K$ tal que la envoltura cerrada y convexa de $M$ es $K$, entonces $M$ está contenido en la clausura de los extremales de $K$. $\square$

**Lección 6.4 El teorema de representación de G. Choquet.**

- Funciones afines. Envolturas afines de funciones continuas.
- El teorema de representación integral de G. Choquet.
- Densidad de las formas lineales continuas en el espacio de las funciones afines.

*Descripción.* [Die84, p. 147-156], [Phe66, p. 13-17]. La elegante y sencilla prueba que presentamos aquí del teorema de G. Choquet es debida a G. Bonsall. Esta demostración utiliza esencialmente el hecho de que sobre un compacto convexo metrizable siempre hay una función continua que es estrictamente convexa. El teorema de G. Choquet asegura que si $K$ es un subconjunto convexo, compacto y metrizable de un e.l.c., entonces cada punto de $K$ es el baricentro de una medida de Radon (de probabilidad) sobre $K$ que está soportada por los extremales de $K$. Teniendo en mente la reformulación baricéntrica del teorema de Krein-Milman estudiada anteriormente, el teorema de Choquet puede ser mirado como un refinamiento del teorema de Krein-Milman. □

**Lección 6.5 Aplicaciones de los teoremas de Krein-Milman y de Choquet.**

- Una aplicación a la teoría de la medida: teorema de Liapunoff.
- Una aplicación a los espacios de funciones diferenciables: teorema de Bernstein.
- Una aplicación a los espacios de funciones holomorfas: teorema de Herglotz.
- Una aplicación a los espacios de Banach: teorema de Rainwater.

*Descripción.* [Phe66, p. 9-13] y [Rud79, p. 117]. El objeto de esta lección es presentar algunas aplicaciones de los teoremas de Krein-Milman y de Choquet. En la primera de ellas sólo se utiliza que todo convexo compacto posee, al menos, un punto extremal, en la segunda, la fórmula baricéntrica del teorema de Krein-Milman, y en la tercera y cuarta, el teorema de Choquet. El contenido de los resultados que presentamos como aplicaciones es el siguiente:

*Teorema de Liapunoff*: sean $\mathfrak{M}$ una $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $S$, $\mu_1, \mu_2 \ldots, \mu_n$ medidas reales no atómicas sobre $\mathfrak{M}$ y $\mu(A) = \big(\mu_1(A), \mu_2(A), \ldots, \mu_n(A)\big)$. Entonces, el rango de la medida vectorial $\mu$ es un conjunto convexo compacto de $\mathbb{R}^n$.

*Teorema de Bernstein*: para una función $f \in C^\infty(0,\infty)$, son equivalentes:

(i) $f$ es completamente monótona, es decir,

$$(-1)^n f^{(n)} \geq 0, \quad n = 0,1,2\ldots$$

(ii) Existe una (única) medida de Borel $\mu$ en $[0,\infty]$ tal que

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} d\mu(\alpha) \qquad \text{para todo } x \in (0,\infty).$$

*Teorema de Herglotz*: sea $D$ el disco unidad del plano complejo. A cada función $f \in \mathscr{H}(D)$ con $f(0) = 1$ y $\operatorname{Re} f(z) > 0$ le corresponde una única medida de probabilidad $\mu$ sobre $\mathbb{T}$ (esfera unidad en $\mathbb{C}$) tal que

$$f(z) = \int_T \frac{1+\xi z}{1-\xi z} d\mu(\xi) \qquad \text{para todo } z \in D.$$

*Teorema de Rainwater*: sean $X$ un espacio de Banach y $(x_n)$ una sucesión acotada en $X$. Entonces, $(x_n)$ converge a $x$ en la topología débil $\sigma(X,X')$ si, y sólo si, $\lim x'(x_n) = x'(x)$, para todo $x' \in X'$ punto extremal de la bola unidad del dual $X'$. □

**Lección 6.6 Compacidad y la propiedad del intercambio de límites.**

- Conjuntos (relativamente) numerablemente y sucesionalmente compactos. Ejemplos.
- La propiedad del intercambio de límites reiterados (PILR).
- Caracterización mediante la PILR de los subconjuntos compactos de $C_p(X,Z)$.

*Descripción.* [Flo80]. Nuestra primera intención en esta lección es mostrar que los distintos conceptos de compacidad relativa que tradicionalmente se consideran en topología pueden ser, y de hecho son, distintos en e.l.c. Mediante ejemplos concretos mostramos la existencia de subconjuntos de e.l.c. que son compactos y que no son sucesionalmente compactos, o que son numerablemente compactos y no son compactos, etc.

Los resultados más potentes que se pueden obtener relativos a la coincidencia de estos conceptos en e.l.c. son los concernientes a las topologías débiles de estos espacios. Si $E[\mathfrak{T}]$ es un e.l.c. y $\sigma(E,E')$ es su topología débil, entonces $E[\sigma(E,E')]$ es un subespacio cerrado del espacio de funciones continuas $C\big(E'[\sigma(E',E)]\big)$, dotado de la topología de convergencia puntual, $C_p\big(E'[\sigma(E',E)]\big)$. De esta forma, el conocimiento de buenas propiedades de compacidad en los espacios $C_p(X)$ tiene aplicación inmediata en buenas propiedades de compacidad en e.l.c. dotados de sus topologías débiles.

Llevados por esta idea, estudiamos primero compacidad en espacios de funciones continuas. Consideramos la propiedad del intercambio de límites reiterados introducida por Grothendieck, y presentamos, como resultado fundamental de esta lección, el hecho de que para un subconjunto $A$ de $C(X,Z)$ ($X$ un espacio topológico numerablemente compacto y $Z$ un espacio métrico compacto) son equivalentes que $A$ sea relativamente numerablemente compacto o relativamente compacto en $C_p(X,Z)$, y que $A$ intercambie límites reiterados con $X$. □

**Lección 6.7 El teorema de Eberlein-Grothendieck.**

- La PILR y la compacidad en los espacios $C_b(X)[T_p]$ y $C_p(X)$.
- El teorema de Eberlein-Grothendieck.
- Caracterización de los espacios localmente convexos casi-completos semirreflexivos.
- Compacidad y compacidad numerable en e.l.c. casi-completos para la topología de Mackey.

*Descripción.* [Flo80]. Considerando los elementos de un e.l.c. $E$ como funciones sobre los equicontinuos del dual $E'$, y haciendo uso del criterio de compacidad en espacios de funciones continuas a través de la PILR y del teorema de completitud de Grothendieck, lección 3.9, establecemos en esta lección uno de los resultados centrales relativos a la compacidad débil en e.l.c.: el teorema de Eberlein-Grothendieck. El teorema de Eberlein-Grothendieck establece, en particular, que en un espacio localmente convexo casi-completo para la topología de Mackey, los conjuntos débilmente relativamente numerablemente compactos son los conjuntos débilmente relativamente compactos, y están caracterizados por el hecho de ser acotados y permutar límites reiterados con los equicontinuos del dual.

Como una consecuencia, caracterizamos los e.l.c. casi-completos que son semirreflexivos como aquellos espacios en los que todo conjunto acotado es débilmente relativamente numerablemente compacto, lo que a su vez equivale a que todos los subespacios cerrados y separables sean semirreflexivos. □

**Lección 6.8 Compacidad sucesional y espacios angélicos.**

- El lema angélico.
- Compacidad en e.l.c. con dual débil$^*$-separable.
- El teorema de Šmulian. Aplicaciones: espacios normados separables. El espacio de las distribuciones.
- Espacios angélicos. Coincidencia de las nociones de compacidad en espacios angélicos. Más aplicaciones del lema angélico: algunas propiedades de estabilidad.

*Descripción.* [Flo80]. Si $f : X \longrightarrow M$ es una aplicación continua e inyectiva de un espacio topológico en un espacio métrico y si $A \subset X$ es relativamente compacto, entonces $f\big|_{\overline{A}}$ es un homeomorfismo; en particular, $A$ es metrizable, $A$ es relativamente sucesionalmente compacto, cada $x \in A$ es límite de una sucesión en $A$, etc.

En esta lección empezamos por extender este simple principio a conjuntos relativamente numerablemente compactos, obteniendo así el llamado *lema angélico*, que constituye la idea básica para la investigación sobre la coincidencia de los distintos conceptos de compacidad, así como para determinar si la clausura sucesional de un conjunto relativamente numerablemente compacto es, precisamente, su clausura. Como una primera aplicación del lema angélico obtenemos el teorema de Šmulian, el cual asegura que en un e.l.c. $E[\mathfrak{T}]$ con dual débil$^*$-separable, cualquier conjunto $A \subset E$ débilmente relativamente numerablemente compacto verifica:

(a) $A$ es débilmente relativamente compacto.

(b) Cualquier punto $x$ de la clausura débil de $A$ es límite débil de una sucesión contenida en $A$.

Estas dos propiedades nos definen la clase de los espacios angélicos, en cuyo marco realizamos nuestro estudio sobre compacidad débil en e.l.c. La clase de los espacios angélicos constituye, de forma natural, la clase de los espacios topológicos donde todos los conceptos de compacidad coinciden. □

**Lección 6.9 El teorema de Eberlein-Šmulian.**

- Teorema de De Wilde de accesibilidad por sucesiones.
- Teorema de Pryce: angelicidad de $C_p(X,Z)$, con $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, $K_n$ relativamente numerablemente compacto y $Z$ métrico compacto.
- El teorema de Eberlein-Šmulian.
- Aplicación a e.l.c.: angelicidad débil de e.l.c. metrizables, (LF) estrictos, etc.
- Teorema de Fremlin: angelicidad de $C_p(X,Z)$, con $X$ un $\sigma$-relativamente numerablemente compacto denso y $Z$ métrico. Aplicación: angelicidad de espacios de aplicaciones lineales, espacios de distribuciones vectoriales, etc.

*Descripción.* [Flo80]. Con el ánimo de extender el teorema de Šmulian a una clase más amplia de e.l.c., en particular a la topología débil de los e.l.c. metrizables, de nuevo es conveniente estudiar primero espacios de funciones continuas. Un refinamiento de la prueba del teorema de Grothendieck, lección 6.6, permite obtener que si $A$ es un subconjunto relativamente numerablemente compacto de $C_p(X,Z)$ (con $X$ compacto y $Z$ métrico compacto), entonces toda $f \in \overline{A}^{Z^X}$ es límite puntual de una sucesión de funciones en $A$, y así, en particular, $C_p(X,Z)$ es un espacio angélico. Esta propiedad de accesibilidad por sucesiones se extiende al caso en que $X$ es $\sigma$-relativamente numerablemente compacto, teorema de De Wilde, y mediante el lema angélico se establece el resultado general de Pryce que garantiza la angelicidad de $C_p(X,Z)$, donde $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ con $K_n$ relativamente numerablemente compacto, y $Z$ es un espacio métrico compacto. Para tales $X$, el espacio de funciones escalares $C_p(X)$ es angélico, y mirando de nuevo cada espacio localmente convexo con su topología débil como un espacio de funciones continuas sobre su dual, obtenemos el teorema de Eberlein-Šmulian, como consecuencia del cual los e.l.c. metrizables son angélicos en su topología débil, los espacios (LF) estrictos también, etc. □

**Lección 6.10 Los teoremas de Krein.**

- Un teorema de Grothendieck: conjuntos débilmente compactos del espacio $C(K)$.
- Envolturas convexas cerradas de conjuntos débilmente compactos: el teorema de Krein.
- Envolturas convexas cerradas de conjuntos compactos en e.l.c.

*Descripción.* [Jar81, p. 192]. Si $K$ es un espacio topológico compacto, el teorema de la convergencia dominada nos permitió, en la lección 5.1 de la asignatura *Análisis Funcional*, probar que una sucesión en $C(K)$ es débilmente convergente si, y sólo si, es acotada en norma y puntualmente convergente. Este hecho, unido al carácter angélico del espacio $C_p(K)$ establecido en la lección anterior, nos lleva a la caracterización de los conjuntos débilmente compactos de $C(K)$ como los acotados en norma y puntualmente compactos, teorema de Grothendieck. Este teorema de Grothendieck es la clave para demostrar que si $A$ es un conjunto débilmente compacto de un e.l.c. $E$, entonces su envoltura cerrada y convexa es débilmente compacta si, y sólo si, es completa para la topología de Mackey. Este resultado general es debido también a Grothendieck, y para espacios de Banach fue obtenido por Krein, por lo que es frecuente que estos resultados se conozcan con el nombre genérico de teoremas de Krein. □

**Bibliografía utilizada en el capítulo:**

[Cho69a], [Die84], [Flo80], [Jar81], [Köt69], [Phe66], [Rud79].

Capítulo 7

# Distribuciones

**TEMARIO**



La teoría de distribuciones libera al cálculo diferencial de las dificultades creadas por la existencia de funciones no diferenciables. Para conseguirlo, el método consiste en extender el cálculo a una clase nueva de objetos, llamados distribuciones o funciones generalizadas, mucho más amplia que la clase de funciones diferenciables en sentido ordinario. La sistematización y formalización del concepto de distribución se debe a L. Schwartz, y el nuevo enfoque que suministra esta teoría permite dar un tratamiento riguroso a las reglas de cálculo simbólico que durante muchos años vinieron siendo utilizadas por físicos e ingenieros.

Los pilares sobre los que se apoya toda la teoría de distribuciones son los que enumeramos a continuación.

En un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$:

(a) Toda función continua es una distribución.
(b) Toda distribución posee derivadas parciales, que son de nuevo distribuciones. Para funciones diferenciables en sentido ordinario, la nueva derivada coincide con la derivada ordinaria.
(c) Las reglas de cálculo siguen en vigor para las distribuciones.

(d) Se dispone de teoremas de convergencia que permiten manejar los procesos habituales de paso al límite.

En el presente capítulo presentaremos, en un contexto general, los espacios de Sobolev, que ya han sido utilizados en la asignatura *Análisis Funcional* para estudiar la Laplaciana y que, sin duda, prestarán un buen soporte teórico en las las asignaturas *Ecuaciones en Derivadas Parciales* y *Ampliación de Ecuaciones en Derivadas Parciales* de la Licenciatura.

**Lección 7.1 Convolución de funciones.**

- Propiedades generales del producto de convolución de funciones.
- Convolución en los espacios de Lebesgue:
  a) Caso $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, con $1/p + 1/q = 1$.
  b) Caso $f, g \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$.
  c) Caso $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
- Derivación bajo el signo integral.
- Derivación de un producto de convolución.
- El teorema de aproximación de H. Cartan.

*Descripción.* [Kho72, p. 114-126]. Una de las operaciones más importantes con funciones medibles en $\mathbb{R}^n$ es el producto de convolución. Recordamos que $L^1(\mathbb{R}^n)$ con el producto de convolución es un álgebra de Banach, véanse las lecciones 4.3 y 6.3 de la asignatura *Medida e Integración*.

En esta lección nos reencontramos con las propiedades fundamentales del producto de convolución de dos funciones $f$ y $g$, $f * g$, analizando dónde pertenece $f * g$ cuando $f$ y $g$ pertenecen a espacios de funciones particulares. Vemos que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, con $p$ y $q$ conjugados, entonces $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$; que si $f, g \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$, etc.

La convolución de funciones tiene gran importancia, entre otras razones, porque el producto de convolución de dos funciones hereda las buenas propiedades de cualquiera de ellas (propiedad de regularización) y porque, como veremos, permite obtener propiedades de aproximación. Finalizamos esta lección viendo que el producto de convolución de una función localmente integrable por una función de clase $C^\infty$ (una de las dos de soporte compacto) es, de nuevo, una función de clase $C^\infty$, y dando una demostración para el teorema de aproximación de H. Cartan, el cual establece que $\psi * f$ es el límite uniforme sobre compactos de trasladadas de $f$ cuando $\psi \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$ y $f$ es continua. $\square$

**Lección 7.2 Aproximación en los espacios de funciones.**

- Sucesiones regularizantes. Teorema de regularización.
- Aproximación por funciones de clase $C^\infty$ en los espacios $\mathscr{E}^k(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n)$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $C_0(\mathbb{R}^n)$.

- Densidad de $\mathscr{D}(\Omega)$ en $\mathscr{D}^k(\Omega)$. Densidad de $\mathscr{D}(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$.
- Lema tipo Urysohn con funciones de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.
- Sucesiones truncantes. Densidad de $\mathscr{D}(\Omega)$ en $\mathscr{E}^k(\Omega)$.

*Descripción.* [Kho72, p. 144-151]. Los métodos de aproximación están siempre presentes entre los procesos fundamentales del análisis y, dada un función arbitraria, surge de forma natural el problema de su aproximación por funciones con mejores propiedades. Los resultados de aproximación que exponemos en esta lección están basados en las propiedades del producto de convolución que hemos estudiado anteriormente. Mostramos aquí que $\mathscr{D}(\Omega)$ es denso en los espacios $\mathscr{D}^k(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ y $\mathscr{E}^k(\Omega)$ (para $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$). Por regularización, comenzamos por probar que $\mathscr{D}(\Omega)$ es denso en los espacios $\mathscr{D}^k(\Omega)$. Después, por truncatura, mostraremos que $\mathscr{D}^k(\Omega)$ es denso en $\mathscr{E}^k(\Omega)$, lo que nos llevará a la densidad de $\mathscr{D}(\Omega)$ en el espacio $\mathscr{E}^k(\Omega)$. Como, por otra parte, $\mathscr{K}(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$, después de la teoría de integración, deduciremos que $\mathscr{D}(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$.

Estos resultados serán importantes para el estudio de los espacios de distribuciones y de sus subespacios distinguidos. □

**Lección 7.3 Espacios de distribuciones.**

- El espacio $\mathscr{D}'(\Omega)$ de las distribuciones. Las topologías débil y fuerte de $\mathscr{D}'(\Omega)$. Recapitulación sobre propiedades de $\mathscr{D}'(\Omega)$.
- Las medidas de Radon como distribuciones. Inyección de $\mathscr{K}'(\Omega)$ en $\mathscr{D}'(\Omega)$. Caracterización de las distribuciones que son medidas de Radon.
- Ejemplos: la $\delta$ de Dirac. Las funciones localmente integrables como distribuciones. El valor principal de Cauchy.
- Distribuciones de orden finito. Inyección de $\mathscr{D}'^k(\Omega)$ en $\mathscr{D}'(\Omega)$. Caracterización de las distribuciones de orden finito. Inyección de $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ en $\mathscr{K}'(\Omega)$.

*Descripción.* [Sch69], [Sch78] y [Kho72, Chapter BC]. Una distribución en un abierto $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ es una forma lineal y continua sobre el espacio $\mathscr{D}(\Omega)$ dotado de su topología límite inductivo. Diversos aspectos de $\mathscr{D}(\Omega)$ y del espacio $\mathscr{D}'(\Omega)$ de las distribuciones han sido estudiados en lecciones precedentes, lecciones 2.2, 2.7, 2.8, 4.1, 4.8, 4.9 y 5.3. Así mismo, en la lección 2.8 hemos estudiado las propiedades básicas del espacio de las medidas de Radon en un abierto cualquiera de $\mathbb{R}^n$.

En esta lección, tras recordar brevemente estas propiedades, pasamos a estudiar otros aspectos de estos espacios, junto con las propiedades de inclusión que se tienen entre ellos. En concreto, estudiamos todas y cada una de las inyecciones siguientes,

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\mathscr{D}(\Omega) & \subset & \mathscr{D}^k(\Omega) & \subset & \mathscr{K}(\Omega) & \subset & L^\infty(\Omega) & & L^p(\Omega) & & L^1(\Omega) & & & & & & \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & & & & & \\
\mathscr{E}(\Omega) & \subset & \mathscr{E}^k(\Omega) & \subset & C(\Omega) & \subset & L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega) & \subset & L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) & \subset & L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) & \subset & \mathscr{K}'(\Omega) & \subset & \mathscr{D}'^k(\Omega) & \subset & \mathscr{D}'(\Omega)
\end{array}$$

□

**Lección 7.4 Particiones de la unidad.**

- Recordatorio topológico sobre espacios paracompactos.
- Cubrimientos abiertos y particiones de la unidad subordinadas.
- Particiones de la unidad de clase $C^\infty$ en un abierto $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$.
- Existencia de particiones de la unidad de clase $C^\infty$ subordinadas a un recubrimiento abierto de $\Omega$.
- Consecuencias sobre las funciones de clase $C^\infty$.

*Descripción.* [Rud79, p. 152-153] y [Kho72, p. 153-157]. Probamos, en esta lección, que todo abierto $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ es un espacio paracompacto; más concretamente, probamos que, para todo recubrimiento abierto $\mathscr{A}$ de $\Omega$, existe un recubrimiento abierto localmente finito $\mathscr{B}$ más fino que $\mathscr{A}$ y formado por conjuntos relativamente compactos. Como consecuencia de esto, y después del lema de separación tipo Urysohn establecido en la lección 7.2, obtenemos que cualquier recubrimiento abierto de $\Omega$ admite una partición de la unidad subordinada y formada por funciones de clase $C^\infty$. De aquí se sigue que cualquier función de clase $C^\infty$ en $\Omega$ puede representarse como una suma de funciones de clase $C^\infty$ cuyos soportes sean tan pequeños como queramos. Estas consideraciones serán de importancia fundamental en el estudio de la estructura local de las distribuciones. □

**Lección 7.5 Restricción y soporte de distribuciones.**

- Restricción de una distribución. Abierto de anulación. Soporte de una distribución.
- Principio de localización. Existencia del soporte de una distribución.
- Principio de relocalización de los trozos.
- Caracterización de los elementos de $\mathscr{E}'^k(\Omega)$. Inyección de $\mathscr{E}'^k(\Omega)$ en $\mathscr{D}'(\Omega)$.
- Distribuciones con soporte compacto. Identidad de $\mathscr{E}'(\Omega)$ y las distribuciones con soporte compacto.
- Continuidad de la inyección canónica de $L^1_{\mathrm{compact}}(\Omega)$ en $C'(\Omega)$.
- Relación entre las sucesiones regularizantes y la medida de Dirac.

*Descripción.* [Rud79, p. 154-157] y [Kho72, p. 169-178]. La construcción del soporte de una distribución requiere del principio de localización, mediante el que una distribución localmente nula se prueba que es nula. Para ello, así como para obtenerse propiedades globales a partir de propiedades locales (principio de relocalización de los trozos), hacemos uso de la existencia de particiones de la unidad de clase $C^\infty$. Una aplicación del lema tipo Urysohn establecido en la lección 7.2, nos permite identificar las distribuciones con soporte compacto con los elementos de $\mathscr{E}'(\Omega)$. Con los resultados establecidos en esta lección podemos completar el cuadro obtenido en la lección 7.3:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\mathscr{D}(\Omega) & \subset & \mathscr{D}^k(\Omega) & \subset & \mathscr{K}(\Omega) & \subset & L^\infty_c(\Omega) & \subset & L^p_c(\Omega) & \subset & L^1_c(\Omega) & \subset & C'(\Omega) & \subset & \mathscr{E}'^k(\Omega) & \subset & \mathscr{E}'(\Omega) \\
 & & & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & & & \\
\bigcap & & \bigcap & & C_0(\Omega) & \subset & L^\infty(\Omega) & & L^p(\Omega) & & L^1(\Omega) & \subset & C'_0(\Omega) & & \bigcap & & \bigcap \\
 & & & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & & & \\
\mathscr{E}(\Omega) & \subset & \mathscr{E}^k(\Omega) & \subset & C(\Omega) & \subset & L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega) & \subset & L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) & \subset & L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) & \subset & \mathscr{K}'(\Omega) & \subset & \mathscr{D}'^k(\Omega) & \subset & \mathscr{D}'(\Omega)
\end{array}
$$

Cabe resaltar, a la vista de este cuadro, que el espacio $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ contiene a todos los espacios catalogados de funciones y está contenido en todos los espacios catalogados de distribuciones. El espacio $\mathscr{D}(\Omega)$ está contenido en todos los espacios catalogados; se puede por tanto dotar a $\mathscr{D}(\Omega)$ de todas las topologías inducidas, así como de su topología natural, que es la única para la que es un espacio completo. Finalizamos la lección mostrando que cualquier sucesión regularizante de funciones $\{\theta_j\}$ tiene a la $\delta$ de Dirac como límite en el espacio $\mathscr{D}'(\Omega)\left[\beta(\mathscr{D}'(\Omega),\mathscr{D}(\Omega))\right]$. $\square$

**Lección 7.6 Derivación de distribuciones.**

- Motivación para la definición de derivada de una distribución.
- Derivadas de una distribución: derivación de distribuciones como *trasposición* de la derivación de funciones. Linealidad y continuidad.
- Propiedades de la derivación. Producto de una función por una distribución. Fórmula de Leibnitz para la derivada de una función por una distribución.
- Ejemplos de derivación: derivada de la $\delta$ de Dirac. Derivada de la función de Heaviside. Derivada de una función de clase $C^\infty$ a trozos en $\mathbb{R}$.
- Primitiva de una distribución en $\mathbb{R}$.

*Descripción.* [Rud79, p. 157-160] y [Kho72, p. 183-189]. Quizás, la propiedad más importante de las distribuciones es que, para cada índice $j$ $(1 \leq j \leq n)$, se puede definir una aplicación lineal de $\mathscr{D}'(\Omega)$ en $\mathscr{D}'(\Omega)$ que generaliza la derivación parcial usual. La definición de derivada de una distribución viene sugerida por el siguiente hecho: si $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ es la distribución asociada, entonces, para cada $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, se tiene la igualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right) \varphi(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x)\, dx,$$

ecuación que puede ser escrita en la forma $\langle T_{\partial_j f},\varphi\rangle = -\langle T_f,\partial_j\varphi\rangle$. Es ahora natural, para un multiíndice $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, definir la derivada $\langle D^\alpha T,\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T,D^\alpha\varphi\rangle$. La aplicación $T \longrightarrow D^\alpha T$ es un múltiplo escalar de la traspuesta de la aplicación $\varphi \longrightarrow D^\alpha\varphi$ de $\mathscr{D}(\Omega)$ en $\mathscr{D}(\Omega)$, obteniéndose así que $D^\alpha T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ para todo $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, y que la aplicación $T \longrightarrow D^\alpha T$ es lineal y continua de $\mathscr{D}'(\Omega)$ en $\mathscr{D}'(\Omega)$. Ahora, todas las funciones localmente integrables son infinitamente derivables en el sentido de las distribuciones, y las reglas habituales de cálculo de derivadas para funciones siguen siendo válidas en el contexto de las distribuciones. Junto a estas propiedades, analizamos en esta lección la sobreyectividad de la derivación en $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, o dicho de otro modo, probamos que toda distribución en $\mathbb{R}$ admite una primitiva. □

**Lección 7.7 Traslación de distribuciones y derivación.**

- Traslación de distribuciones.
- Relación entre la traslación y la derivación.
- Distribuciones independientes de una variable. Caracterización mediante las derivadas.
- Distribuciones cuyas derivadas son funciones. Lema de Du Bois-Reymond.

*Descripción.* [Kho72, p. 197-202]. Analizamos en esta lección la relación entre la traslación de distribuciones y la derivación, con el ánimo de obtener una expresión para la derivada de una distribución análoga al límite del cociente incremental que nos da la derivada de una función. Siendo más concretos, si $a \in \mathbb{R}^n$ y $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, denotaremos por $\tau_a(\varphi)(x) := \varphi(x-a)$. Para $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, se define la trasladada $\tau_a T$ como la distribución que satisface $\langle\tau_a T,\varphi\rangle := \langle T,\tau_{-a}\varphi\rangle$. Mostramos que si $a = (a_1,0,\ldots,0)$ y $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{a_1}(\tau_{-a}T - T) = \frac{\partial}{\partial x_1}T \qquad \text{en } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),$$

que es la expresión análoga a la utilizada para calcular la derivada de una función. Ahora, la caracterización de las distribuciones independientes de una variable es inmediata: $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *es independiente de la variable $j$-ésima si, y sólo si,* $\frac{\partial}{\partial x_j}T = 0$. Con esta caracterización se estudian ahora las distribuciones cuyas derivadas son funciones, obteniéndose que si $f,g \in C(\mathbb{R}^n)$ y $T_f,T_g$ son las distribuciones asociadas, entonces, de la igualdad $\frac{\partial}{\partial x_1}T_f = T_g$ en $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, se deduce que $f$ es continuamente derivable respecto a $x_1$ y que $\frac{\partial}{\partial x_1}f = g$, lema de Du Bois-Reymond. □

**Lección 7.8 Producto tensorial de distribuciones.**

- Producto tensorial de funciones. Densidad de $\mathscr{D}(X)\otimes\mathscr{D}(Y)$ en $\mathscr{D}(X\times Y)$.
- Funciones definidas por dualidad.

- Motivación para la definición de producto tensorial. Producto tensorial de distribuciones. Existencia y unicidad. Ejemplos.
- Propiedades del producto tensorial. Continuidad.

*Descripción.* [Kho72, p. 207-213]. Como otras operaciones, el producto tensorial de distribuciones viene sugerido por el correspondiente de funciones. Si $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ son dos abiertos y $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$, $g \in L^1_{\text{loc}}(Y)$, el producto tensorial de $f$ y $g$ es la función $(f \otimes g)(x,y) := f(x)g(y)$. Mirando $f$ y $g$ como distribuciones, el teorema de Fubini nos da que

$$\langle T_{f\otimes g}, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle \langle T_g, \psi \rangle,$$

para cada $\varphi \in \mathscr{D}(X)$ y $\psi \in \mathscr{D}(Y)$. Esta fórmula nos sugiere la definición del producto tensorial de dos distribuciones: *si $S \in \mathscr{D}'(X)$ y $T \in \mathscr{D}'(Y)$, se llama producto tensorial de $S$ y $T$ a una distribución $S \otimes T \in \mathscr{D}(X \times Y)$ tal que*

$$\langle S \otimes T, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle S, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(X),\, \psi \in \mathscr{D}(Y).$$

Una distribución de este tipo siempre existe (en virtud de que la función definida por dualidad $\psi(y) = \big\langle S, \theta(\cdot, y) \big\rangle \in \mathscr{D}(Y)$, para cada $\theta \in \mathscr{D}(X \times Y)$) y es única (gracias a la densidad de $\mathscr{D}(X) \times \mathscr{D}(Y)$ en $\mathscr{D}(X \times Y)$). Las propiedades de derivación, iteración, etc., válidas para el producto tensorial de funciones, se extienden al producto tensorial de distribuciones, obteniéndose que la aplicación $(S,T) \longrightarrow S \otimes T$ de $\mathscr{D}'(X) \times \mathscr{D}'(Y)$ en $\mathscr{D}'(X \times Y)$ es una aplicación bilineal continua. $\square$

**Lección 7.9 Convolución de distribuciones.**

- Motivación para la definición de producto de convolución.
- Convolución de dos distribuciones de soporte compacto.
- Familias de conjuntos permitidas para la convolución. Restricción sobre el soporte. Definición general de producto de convolución.
- Propiedades del producto de convolución: conmutatividad, papel de la $\delta$ de Dirac, asociatividad, soporte, derivación y traslación.
- Papel regularizador de la convolución. Convolución de una función y una distribución. Teoremas de densidad.

*Descripción.* [Kho72, p. 213-227]. En la lección 7.1 hemos estudiado la convolución de funciones, partiendo de lo cual definiremos ahora la convolución de distribuciones: si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, su producto de convolución $f * g$, mirado como una distribución $T_{f*g}$, actúa de la siguiente forma:

$$\langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \langle T_{f\otimes g}, \varphi^{\Delta} \rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),$$

siendo $\varphi^{\Delta}(x,y) = \varphi(x+y)$. Esta fórmula sugiere la definición del producto de convolución para dos distribuciones de soporte compacto: *si* $S,T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, *se define su producto de convolución como una nueva distribución* $S*T$ *definida por la igualdad*

$$\langle S*T,\varphi\rangle = \langle S\otimes T,\varphi^{\Delta}\rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

En general, en la expresión anterior, $\varphi^{\Delta} \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ no tiene, necesariamente, soporte compacto. Así, para darle sentido a la expresión $\langle S\otimes T,\varphi^{\Delta}\rangle$, con $S,T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ cualesquiera, hemos de imponer condiciones sobre sus soportes: $\mathrm{sop}(S)$ y $\mathrm{sop}(T)$ han de formar un par permitido para la convolución. Esto se cumple automáticamente si uno de los dos conjuntos es compacto. Podemos ahora efectuar productos de convolución de una distribución $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ y una función $f \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$, siempre que una de las dos tenga soporte compacto, obteniéndose que $T*f \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$, papel regularizador de la convolución.

Estas cuestiones, junto con las propiedades generales del producto de convolución, son los temas de estudio que abordamos en esta lección. $\square$

**Lección 7.10 Distribuciones temperadas.**

- Recordatorio sobre el espacio $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Relación de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ con los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, $C_0(\mathbb{R}^n)$ y $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$. Densidad de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
- El dual de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. El espacio de las distribuciones temperadas.
- Propiedades fundamentales de las distribuciones temperadas. Algunos ejemplos.
- Inyección de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

*Descripción.* [VK72, p. 10-15]. En la lección 2.2 hemos introducido la clase de Schwarz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ como aquellas funciones $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ para las que

$$p_N(f) = \sup_{|\alpha|\le N}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1+\|x\|^2\right)^N\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}f(x)\right| < \infty, \quad N\in\mathbb{N},\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n).$$

Como vimos allí, la familia de seminormas $(p_N)_{N\in\mathbb{N}}$ define en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ una topología localmente convexa con la que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Fréchet. Su dual $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ son las distribuciones temperadas, entre las que se encuentran las medidas de crecimiento lento y las funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$. En el siguiente cuadro resumimos la relación entre los nuevos espacios introducidos y los ya estudiados.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathscr{K}(\mathbb{R}^n) & \supset & \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) & \subset & L^p_c(\mathbb{R}^n) & \subset & \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) & \supset & C'(\mathbb{R}^n) \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
C_0(\mathbb{R}^n) & \supset & \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) & \subset & L^p(\mathbb{R}^n) & \subset & \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) & \supset & C'_0(\mathbb{R}^n) \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
C(\mathbb{R}^n) & \supset & \mathscr{E}(\mathbb{R}^n) & \subset & L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) & \subset & \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) & \supset & \mathscr{K}'(\mathbb{R}^n)
\end{array}$$

□

**Lección 7.11 Transformación de Fourier.**

- Transformación de Fourier de funciones.
- Propiedades fundamentales de la transformación de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$.
- Transformación de Fourier en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
- Prolongamiento a $L^2(\mathbb{R}^n)$. El teorema de Plancherel-Parseval.
- Transformación de Fourier de distribuciones temperadas.

*Descripción.* [VK72, p. 23-34]. En esta lección estudiamos brevemente la transformación de Fourier, que es una herramienta esencial para dar aplicaciones de la teoría de distribuciones a las ecuaciones en derivadas parciales, prestando atención al teorema de Plancherel-Parseval, que describe la transformación de Fourier como un operador unitario en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dada una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, su transformada y cotransformada de Fourier son, respectivamente, las funciones

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx \qquad \text{y} \qquad \check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{+2\pi i x\xi}\,dx.$$

Entre las propiedades más relevantes de la transformación de Fourier caben destacar las siguientes:

a) $\hat{}$ intercambia derivación y multiplicación por monomios.

b) $\hat{}$ establece una aplicación lineal y continua entre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $C_0(\mathbb{R}^n)$ (lema de Riemann-Lebesgue).

c) Para $f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $\int \hat{f}(\xi)g(\xi)\,d\xi = \int f(x)\hat{g}(x)\,dx$ (fórmula de transferencia).

Estas propiedades permiten obtener que $\hat{}$ es un isomorfismo de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sobre $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, cuya inversa es $\check{}$. La fórmula de transferencia nos dice que si miramos $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ como un subespacio prehilbertiano de $L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\langle \hat{f},\hat{g}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, teorema de Plancherel-Parseval. Dado que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\hat{}$ se extiende a un operador unitario sobre el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$, cuyo inverso es la extensión de $\check{}$, teorema de Riesz-Plancherel. Por transposición obtenemos la transformación de Fourier en $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, para la cual estudiamos sus principales propiedades. □

**Lección 7.12 Espacios de Sobolev.**

- Espacios $H^k(\Omega)$. Estructura hilbertiana.
- Densidad de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ en $H^k(\mathbb{R}^n)$.
- Espacios $H_0^k(\Omega)$. Definición. Complemento ortogonal de $H_0^k(\Omega)$ en $H^k(\Omega)$.
- Espacios $H^{-k}(\Omega)$. Identificación como espacios de distribuciones.
- Teorema del isomorfismo: identificación de $H_0^k(\Omega)$ y $H^{-k}(\Omega)$.
- Teorema de estructura: distribuciones prolongables a elementos de $H^{-k}(\Omega)$.

*Descripción.* [VK72, p. 169-174]. Ciertos operadores en derivadas parciales pueden mirarse como operadores entre espacios de Sobolev, como por ejemplo, la laplaciana $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, véase la lección 1.9, de la asignatura *Análisis Funcional*. Si $\Omega$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, el espacio de Sobolev $H^k(\Omega)$ es el conjunto de todas las funciones definidas en $\Omega$ cuyas derivadas, en el sentido de las distribuciones, de orden menor o igual a $k$ son (clases de) funciones de cuadrado integrable (con respecto a la medida de Lebesgue) sobre $\Omega$. $H^k(\Omega)$ tiene una estructura natural de espacio de Hilbert, y en el caso $\Omega = \mathbb{R}^n$, el espacio $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^k(\mathbb{R}^n)$.

En el caso general de un $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cualquiera, se considera el espacio $H_0^k(\Omega) = \overline{\mathscr{D}(\Omega)}$ en $H^k(\Omega)$, cuyo dual se denota por $H^{-k}(\Omega)$. La representación de los elementos de $H^{-k}(\Omega)$ como sumas de derivadas de funciones del espacio $L^2(\Omega)$, teorema de estructura, se obtiene a partir del teorema del isomorfismo, que establece que el operador diferencial $\sum_{|\alpha|\leq k}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}$ establece un isomorfismo isométrico de $H_0^k(\Omega)$ sobre $H^{-k}(\Omega)$. Terminamos comentando como el teorema de Relich, [Zei95, p. 287] asegura que para un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, la inmersión $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ es compacta, lo que junto al Principio de Dirichelt estudiado en la lección 1.9, de la asignatura *Análisis Funcional*, permite utilizar la teoría de operadores compactos autoadjuntos en espacios de Hilbert para resolver completamente el problema de valores propios asociado al operador de Laplace. $\square$

## Bibliografía utilizada en el capítulo:

[Rud79], [Sch69], [Sch78], [Trè67], [Kho72], [VK72].

# Bibliografía

[Ahl78] L. V. Ahlfors, *Complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1978, An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics. MR 80c:30001

[Apo76] T. M. Apostol, *Análisis matemático*, segunda ed., Editorial Reverté, s.a., 1976.

[Ash72] R. B. Ash, *Real analysis and probability*, Probability and Mathematical Statistics, vol. 11, Academic Press, New York, 1972. MR 55 #8280

[Bil79] P. Billingsley, *Probability and measure*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1979. MR 80h:60001

[BN66] G. Bachman and L. Narici, *Functional analysis*, Academic Press, New York, 1966. MR 36 #638

[BNS77] E. Beckenstein, L. Narici, and C. Suffel, *Topological algebras*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 24, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977, Notas de Matemática, No. 60. [Mathematical Notes, No. 60]. MR 57 #13495

[BR83] C. Blair and L. A. Rubel, *A universal entire function*, Amer. Math. Monthly **90** (1983), no. 5, 331–332. MR 85a:30046

[Bre84] H. Brezis, *Análisis funcional*, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1984.

[BRMV87] F. Bombal, L. Rodríguez-Marín, and G. Vera, *Problemas de Análisis Matemático (3. Cálculo Integral)*, Editorial AC, Madrid, 1987.

[Car68] H. Cartan, *Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas*, Selecciones científicas. Madrid, 1968.

[Cho66] G. Choquet, *Topology*, Translated from the French by Amiel Feinstein. Pure and Applied Mathematics, Vol. XIX, Academic Press, New York, 1966. MR 33 #1823

[Cho69a] ———, *Lectures on analysis. Vol. II: Representation theory*, Edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969. MR 40 #3253

[Cho69b] ———, *Lectures on analysis. Vols. I, II and III*, Edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969. MR 40 #3252; 40 #3253; 40 #3254

[CM02] B. Cascales and J. M. Mira, *Análisis funcional*, ICE- Universidad de Murcia - DM, 2002.

[Coh80] D. L. Cohn, *Measure theory*, Birkhäuser, Boston, Mass., 1980. MR 81k:28001

[Con78] J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, New York, 1978. MR 80c:30003

[Con85] ———, *A course in functional analysis*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 96, Springer-Verlag, New York, 1985. MR 86h:46001

[Day73] M. M. Day, *Normed linear spaces*, third ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 21, Springer-Verlag, New York, 1973. MR 49 #9588

[dG80] M. de Guzmán, *A change of variables formula without continuity*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), no. 9, 736–739. MR 82c:26014 [dGR79] M. de Guzmán and B. Rubio, *Integración: teoría y técnicas*, Editorial Alhambra S. A., Madrid, 1979. MR 81j:28001

[Die78] J. Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900. Tomes I, II*, Hermann, Paris, 1978, Édité par Jean Dieudonné. MR 80k:01002a; 80k:01002b

[Die84] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 92, Springer-Verlag, New York, 1984. MR 85i:46020

[DS58] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators I. General theory*, With the assistance of W. G. Bade and R. G. Bartle. Pure and Applied Mathematics, vol. 7, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958. MR 22 #8302

[FAFI02] J. A. Facenda-Aguirre and F. J. Freniche-Ibáñez, *Integración de funciones de varias variables*, Piramide, Madrid, 2002.

[FdlP80] D. Feyel and A. de la Pradelle, *Ejercicios sobre las funciones analitícas*, Paraninfo, Madrid, 1980, Con soluciones. [With solutions], Translated from the French by Emilio Romero Ros. MR 82m:30001

[FHH$^+$01] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant, and V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, vol. 8, Springer-Verlag, New York, 2001. MR 2002f:46001

[Flo80] K. Floret, *Weakly compact sets*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 801, Springer, Berlin, 1980, Lectures held at S.U.N.Y., Buffalo, in Spring 1978. MR 82b:46001

[Fol99] G. B. Folland, *Real Analysis, modern techniques and their applications*, Wiley-Interscience, New York, 1999, Second edition. MR 2000c:00001, y 86k:28001

[Fre01] D. H. Fremlin, *Measure Theory. Vol. I, II*, Torres Fremlin, Colchester.England, 2001. MR 56 #12824

[Geo80] C. George, *Exercices et problèmes d'intégration*, Gauthier-Villars, Paris, 1980. MR 82h:28001

[GG81] I. Gohberg and S. Goldberg, *Basic operator theory*, Birkhäuser, Boston, Mass., 1981. MR 83b:47001

[GM78] J. D. Gray and S. A. Morris, *When is a function that satisfies the Cauchy-Riemann equations analytic?*, Amer. Math. Monthly **85** (1978), no. 4, 246–256. MR 57 #9940

[Gro55] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. (1955), no. 16, 140. MR 17,763c

[Gro73] ———, *Topological vector spaces*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1973, Translated from the French by Orlando Chaljub, Notes on Mathematics and its Applications. MR 51 #8772

[Hil59] E. Hille, *Analytic function theory. Vol. I*, Introduction to Higher Mathematics, Ginn and Company, Boston, 1959. MR 21 #6415

[Hil77] ———, *Analytic function theory. Vol. II*, second ed., Introductions to Higher Mathematics, Pub. Co., Chelsea, New York, 1977.

[Hor66] J. Horváth, *Topological vector spaces and distributions. Vol. I*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966. MR 34 #4863

[Jam74] G. J. O. Jameson, *Topology and normed spaces*, Chapman and Hall, London, 1974. MR 57 #3828

[Jar81] H. Jarchow, *Locally convex spaces*, Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks], B. G. Teubner, Stuttgart, 1981. MR 83h:46008

[Kel62] J. L. Kelley, *Topología general*, Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 1962. MR 33 #6566

[Kho72] K. Vo-Khac Khoan, *Distributions, analyse de Fourier, operateurs aux derivées partielles*, vol. I, Vuibert, Paris, 1972.

[KN76] J. L. Kelley and I. Namioka, *Linear topological spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 36, Springer-Verlag, New York, 1976, With the collaboration of W. F. Donoghue Jr., R. L. Kenneth, B. J. Pettis, E. T. Poulsen, G. B. Price, W. Robertson, W. R. Scott, and K. T. Smith, Second corrected printing. MR 52 #14890

[Köt69] G. Köthe, *Topological vector spaces I*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969, Translated from the German by D. J. H. Garling. MR 40 #1750

[Köt79] ———, *Topological vector spaces II*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science], vol. 237, Springer-Verlag, New York, 1979. MR 81g:46001

[Leb28] H. Lebesgue, *Leçons sur l'intǵration et la recherche des fonctions primitives*, second ed., Collection de monographies sur la théorie desfonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1928, Reimpreso, Chealsea Publ. New York, 1973.

[Lim81] B. V. Limaye, *Functional analysis*, Wiley Eastern Ltd., New Delhi, 1981. MR 83b:46001

[Mar65] A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable. Vol. II*, Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965. MR 31 #5965

[NP82] R. Nevanlinna and V. Paatero, *Introduction to complex analysis*, second ed., Chelsea Publishing Co., New York, 1982, Translated from the German by T. Kövari and G. S. Goodman. MR 83d:30002

[Ort93] J. M. Ortega, *Introducción al Análisis Matemático*, Labor universitaria, manuales. Univ. Autónoma de Barcelona, Barcelona, 1993.

[Oxt71] J. C. Oxtoby, *Measure and category. A survey of the analogies between topological and measure spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 2, Springer-Verlag, New York, 1971. MR 52 #14213

[PCB80] P. Pérez-Carreras and J. Bonet, *Espacios tonelados*, Pub. Universidad de Sevilla, 1980.

[Pes70] I. N. Pesin, *Classical and modern integration theories*, Probability and Mathematical Statistics, vol. 8, Academic Press, New York, 1970, Translated from the Russian and edited by Samuel Kotz. MR 41 #8614

[Phe66] R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's theorem*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J.-Toronto, Ont.-London, 1966. MR 33 #1690

[Pie72] A. Pietsch, *Nuclear locally convex spaces*, Springer-Verlag, New York, 1972, Translated from the second German edition by W. H. Ruckle, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 66. MR 50 #2853

[PL74] G. Polya and G. Latta, *Complex variables*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1974. MR 50 #7490

[Rem91] R. Remmert, *Theory of complex functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 122, Springer-Verlag, New York, 1991, Translated from the second German edition by Robert B. Burckel, Readings in Mathematics. MR 91m:30001

[RSN72] F. Riesz and B. Sz-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionelle*, Sisième Edition, Gauthier-Villars, 1972.

[Rud79] W. Rudin, *Análisis funcional*, Ed. Reverté, Barcelona, 1979.

[Rud88] ______, *Análisis real y complejo*, tercera ed., McGraw-Hill, 1988.

[Sch67] L. Schwartz, *Cours d'analyse*, Hermann, Paris, 1967.

[Sch69] ______, *Métodos matemáticos para las ciencias físicas*, Selecc. Científ., Madrid, 1969.

[Sch71] H. H. Schaefer, *Topological vector spaces*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1971.

[Sch78] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. IX-X, Hermann, Paris, 1978, Nouvelle édition, entiérement corrigée, refondue et augmentée.

[Sch79] H. Schwerdtfeger, *Geometry of complex numbers*, Dover Publications Inc., New York, 1979, Circle geometry, Moebius transformation, non-Euclidean geometry, A corrected reprinting of the 1962 edition, Dover Books on Advanced Mathematics. MR 82g:51032

[SZ70] S. Saks and A. Zygmund, *Fonctions analytiques*, Traduit de l'anglais par M. Lahy, Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1970. MR 42 #4708

[Trè67] F. Trèves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, New York, 1967. MR 37 #726

[Tsi84] N.-K. Tsing, *Infinite-dimensional Banach spaces must have uncountable basis—an elementary proof*, Amer. Math. Monthly **91** (1984), no. 8, 505–506. MR 85m:46021

[UD00] P. A. Ulyánov and M. I. Dyachenko, *Análisis Real. Medida e Integración*, Addison Wesley - Univ. Autónoma de Madrid, Madrid, 2000.

[Val82] M. Valdivia, *Topics in locally convex spaces*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 67, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 85. MR 84i:46007

[Ver00] G. Vera, *Introducción al análisis complejo*, Publicaciones del Departamento Matemáticas, Universidad de Murcia. 169 págs., 2000.

[VK72] K. Vo-Khac, *Distributions, analyse de Fourier, operateurs aux derivées partielles*, vol. II, Vuibert, Paris, 1972.

[vRS82] A. C. M. van Rooij and W. H. Schikhof, *A second course on real functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 83j:26001

[Wei74] A. J. Weir, *General integration and measure*, Integration and measure, vol. 2, Cambridge University Press, London, 1974. MR 58 #1067b

[Wil78] M. De Wilde, *Closed graph theorems and webbed spaces*, Research Notes in Mathematics, vol. 19, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1978. MR 81j:46013

[WZ77] R. L. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and integral. An introduction to real analysis*, Pure and Applied Mathematics, vol. 43, Marcel Dekker Inc., New York, 1977. MR 58 #11295

[Yos80] K. Yosida, *Functional analysis*, sixth ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 123, Springer-Verlag, Berlin, 1980. MR 82i:46002

[Zei95] E. Zeidler, *Applied functional analysis. Applications to mathematical physics*, Applied Mathematical Sciences, vol. 108, Springer-Verlag, New York, 1995. MR 96i:00005